



Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

**Cálculo Numérico de Campo
Eléctrico en las Configuraciones
de Trabajo en Línea Viva
Considerando la Altitud**

Tesis

que para Obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

con Especialidad en

Computación y Matemáticas Industriales

Presenta:

Pedro Javier Elizarraraz Rivera

Director de Tesis:

Dr. Miguel Angel Moreles

Co – Director de Tesis:

Dr. Carlos Montes de Oca Vázquez

Guanajuato, Gto., Noviembre del 2001

JE
96

A Erika con Amor

A mi Familia

A los que han Contribuido a Debilitar un Poco las Cadenas del Orión

A los que se atrevan a Unirse a los Liberadores del Orión

010023

C I M A T
BIBLIOTECA

Agradecimientos

A todas las personas que hicieron posible este trabajo, en especial a quienes me asesoraron: el **Dr. Miguel Angel Moreles** en el área de matemáticas aplicadas, el **M. en I. Andrés Villalobos** en el área de alta tensión y el **Dr. Carlos Montes de Oca** en el área de vinculación y administración del proyecto.

Al **LAPEM** el apoyo prestado para utilizar sus instalaciones y recursos, en especial al **Ing. Fernando Elizarraraz** y al **Ing. Sergio Corrales**.

A **Grupo SSC de México S. A. de C. V.**, sus atenciones en el uso de **ANSYS** y de sus instalaciones de computo, en especial al **Ing. Fernando Balderas**, **Ing. Carlos Esparza** y **M. En C. Adrián González**.

A mis excelentes profesores en la maestría, los Doctores: **Johan Van Horebeek**, **Carlos Montes de Oca**, **Mariano Rivera**, **Salvador Botello**, **José Luis Marroquín**, **Francisco Sánchez**, **Miguel Angel Moreles** y **Raúl Rojas**.

Al Clan, mis compañeros inmejorables en la maestría: **Antonio Muñoz**, **Edmar Mota**, **Javier Viguera**, **Jesús Navarro** y **Justino Ramírez**.

A mi Familia, por el apoyo incondicional: a mi Papá **Manuel**, a mi Tía **Jesús** y mi Tío **Ramón** y a mis hermanos: **Jorge**, **María de Jesús**, **Victor**, **Rebeca**, **Guadalupe**, **Fernando**, y a sus respectivas familias.

A mi Novia **Erika**, por su apoyo invaluable, comprensión y soporte en todo momento.

Prólogo

En este trabajo se aplican dos técnicas de simulación numérica de campo eléctrico, el Método del Elemento Finito y el Método del Elemento en la Frontera, con el fin de encontrar una corrección al cálculo del campo eléctrico que se establece en las líneas de transmisión de energía eléctrica, tomando en cuenta la altitud del lugar en que se encuentre la línea. La aplicación principal de este trabajo es, en la determinación de las distancias de seguridad para realizar trabajo de mantenimiento a la línea de transmisión sin desenergizarla.

Este problema fue planteado por la Oficina de Transmisión del Laboratorio de Pruebas a Equipos y Materiales (LAPEM) de la Comisión Federal de Electricidad (CFE), y se contó con la asesoría y apoyo de dicha oficina de LAPEM. Todo el trabajo de simulación utilizando el Método del Elemento en la Frontera fue realizado en las instalaciones de LAPEM.

También se contó con el apoyo de la empresa Grupo SSC de México, ya que una parte del trabajo de simulación con el Método del Elemento Finito fue realizado en sus instalaciones, y la otra parte fue realizada mediante una licencia de cortesía del software de elemento finito ANSYS.

Este trabajo fue realizado para obtener el grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Ciencias de la Computación y Matemáticas Industriales, en el Centro de Investigación en Matemáticas A. C., en la ciudad de Guanajuato, Gto. México.

... We can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium, which is the cause of electric and magnetic phenomena

w.d. Niven, ed., The Scientific Papers of J. Clerk Maxwell, 1890, vol. I, p. 500

Índice

Tabla de Figuras	1
Capítulo 1. Introducción	
1.1 Contexto	
1.1.1 Sistema de Potencia	7
1.1.2 Retos del Sistema de Potencia	8
1.1.3 Tendencias para hacer Frente a los Retos	10
1.2 Delimitación del Problema	11
1.3 Solución Propuesta	13
1.4 Motivación y Beneficios	14
1.5 Organización del Trabajo	14
Capítulo 2. Comportamiento de los Dielectricos en la Simulación del Trabajo en Línea Viva	
2.1 El Trabajo en Línea Viva	16
2.2 Comisiones Críticas de Trabajo en Línea Viva	19

2.3 Simulación de Trabajo en Línea Viva	21
2.4 Fundamento Físico de la Simulación de Trabajo en Línea Viva	23
2.4.1 Campo Eléctrico	24
2.4.2 Potencial Eléctrico	24
2.4.3 Medios Materiales	25
2.4.4 Polarización	25
2.4.5 Densidad de Flujo Eléctrico	27
2.4.6 Susceptibilidad Eléctrica y Constante Dieléctrica	27
2.4.7 Ruptura y Rigidez Dieléctrica	28
2.5 Física de la Descarga entre Electrodo en un Aislamiento Gaseoso	
2.5.1 Ionización	29
2.5.2 Rompimiento en Campos Uniformes	30
2.5.3 Teoría del Streamer	31
2.5.4 Rompimiento en Campos no Uniformes	32
2.6 Mecanismos de Polarización y Naturaleza de la Constante Dieléctrica de los Gases. Teoría Microscópica	33
2.6.1 Polarización Electrónica	34
2.6.2 Polarización Iónica	35
2.6.3 Polarización Orientacional	36
2.6.4 Susceptibilidad y Permitividad. Punto de Vista de la Teoría Microscópica	37
2.6.5 Constante Dieléctrica de los Gases. Punto de Vista de la Teoría Microscópica	38
2.6.5.1 Gases Monoatómicos	38

2.6.5.2 Gases no Polares	38
2.6.5.3 Gases Polares	39
Capítulo 3. Métodos de Solución al Modelo del Campo Electrostático	
3.1 Las Ecuaciones Diferenciales Parciales en Electrostática	41
3.2 Métodos Analíticos para la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales	42
3.3 Métodos Numéricos para la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales	43
3.4 Método del Elemento Finito	
3.4.1 Generalidades	44
3.4.2 Formulación del Problema del Campo Eléctrico para la Solución con el Método del Elemento Finito	
3.4.2.1 Descripción General del Método del Elemento Finito	45
3.4.2.2 Método de los Residuos Ponderados	46
3.4.2.3 Formulación de Elemento Finito	48
3.4.2.4 Preproceso	50
3.4.2.5 Proceso	56
3.4.2.6 Postproceso	57
3.5 Método del Elemento en la Frontera	58
3.5.1 Elección de la Función de Peso	58
3.5.2 Formulación del Método del Elemento en la Frontera	59
3.5.2.1 Preproceso	62
3.5.2.2 Proceso	63
3.5.2.3 Postproceso	65

Capítulo 4. Corrección al Campo Eléctrico Considerando Factores Atmosféricos

4.1 La Coordinación de Aislamiento, en el Diseño de Líneas de Transmisión	67
4.2 Corrección al Valor de la Tensión Crítica de Flameo	
4.2.1 Corrección por Factores Atmosféricos	68
4.2.2 Corrección por la Presencia de Electrodo Flotados	70
4.3 Experimentación Realizada a 1710 msnm	72
4.4 Cálculo de Campo Eléctrico Considerando Factores Atmosféricos	
4.4.1 El Campo Eléctrico y la Tensión de Ruptura	73
4.4.1.1 Cálculo del Campo Eléctrico por el Método del Elemento Finito con ANSYS	74
4.4.1.1.1 Preproceso de Elemento Finito con ANSYS	75
4.4.1.1.2 Proceso de Elemento Finito con ANSYS	76
4.4.1.1.3 Postproceso de Elemento Finito con ANSYS	77
4.4.1.2 Cálculo del Campo Eléctrico por el Método del Elemento en la Frontera	77
4.4.1.2.1 Preproceso de Elemento en la Frontera	78
4.4.1.2.2 Proceso de Elemento en la Frontera	78
4.4.1.2.3 Postproceso de Elemento en la Frontera	79
4.4.2 Variación de la Distribución de Campo Eléctrico con las Condiciones Atmosféricas	79

Capítulo 5. Resultados

5.1 Estrategia de Solución	81
----------------------------	----

5.2 Cálculo Numérico de Campo Eléctrico

5.2.1 Cálculo de Campo Eléctrico en Electrodo Punta-Plano con Electrodo Flotado	82
5.2.1.1 Cálculo por el Método del Elemento Finito Usando ANSYS	82
5.2.1.1.1 Electrodo Flotado en Forma de Esfera	82
5.2.1.1.2 Electrodo Flotado en Forma de Barra	84
5.2.1.2 Cálculo de Campo Eléctrico con Software Basado en el Método del Elemento en la Frontera	84
5.2.1.2.1 Electrodo Flotado en Forma de Esfera	86
5.2.1.2.2 Electrodo Flotado en Forma de Barra	88
5.3 Determinación del Campo Eléctrico Crítico	89
5.3.1 Electrodo Flotado en Forma de Esfera	90
5.3.2 Electrodo Flotado en Forma de Barra	92
5.4 Determinación de la Variación de la Permitividad Relativa con las Condiciones Atmosféricas	94
5.4.1 Determinación Experimental de la Permitividad Relativa del Aire a 1710 msnm	94
5.4.2 Determinación Analítica de la Permitividad Relativa del Aire a 1710 msnm	95
5.4.2.1 Polarización del Aire en Diferentes Condiciones Atmosféricas	97
5.4.2.2 Cálculo de la Permitividad Relativa a 1710msnm	99
5.5 Comparación entre el Campo Eléctrico Crítico Establecido con la Permitividad Relativa Corregida y el Establecido con la Tensión de Rompimiento Corregida, en Ambiente de Gran Altitud	100

Capítulo 6. Conclusiones

6.1 Conclusiones	103
------------------	-----

6.1.1 Acerca del Entorno del Problema	103
6.1.2 Acerca de la Modelación Física del Trabajo en Línea Viva	104
6.1.3 Acerca de los Fundamentos de la Simulación	105
6.1.4 Acerca de los Métodos Numéricos de Solución al Modelo del Campo Eléctrico	106
6.1.5 Acerca de las Correcciones Realizadas Anteriormente	108
6.1.6 Acerca de los Resultados Obtenidos para la Corrección de Campo Eléctrico	109
6.2 Aplicaciones	110
6.3 Trabajo Futuro	111
Referencias	113

Tabla de Figuras

FIGURA	DESCRIPCIÓN	PÁGINA
1.1	Fotografía obtenida desde un satélite, que muestra los niveles de utilización de energía eléctrica en el planeta.	8
1.2	Consumo de energía eléctrica por sector 1988-1999	9
1.3	Capacidad instalada de generación y transmisión, 1988-1999	10
2.1	Torre de transmisión de energía eléctrica de doble circuito.	17
2.2	Trabajo en línea viva: a) hombres subiendo a una torre de doble circuito, b) hombre descolgando desde la línea después de hacer trabajo de contacto, c) trabajo con helicóptero, d) trabajo en las cadenas de aisladores, e) trabajo y traslado en plataforma por las líneas.	18
2.3	Impulso doble exponencial.	20
2.4	Electrodo utilizado para simular las condiciones de trabajo en línea viva. A) Objeto flotado en forma de esfera. B) Objeto flotado en forma de barra.	22
2.5	Corte transversal de un medio dieléctrico polarizado	26
2.6	Los Posibles procesos de descarga en un aislamiento gaseoso	31

5.4	Discretización para análisis de elemento finito para la configuración de la figura 4.1 b.	85
5.5	Solución obtenida en ANSYS para la configuración de la figura 4.1 b, con 1115 kV aplicados al electrodo de potencial y 0.5 m de distancia entre los electrodos.	85
5.6	Discretización de la configuración de la figura 4.1 a, para análisis por el Método del Elemento en la Frontera. Cortesía de LAPEM.	86
5.7	Solución de campo obtenida en ELECTRO para la configuración de la figura 4.1 a, con 1175 kV y una distancia entre electrodos de 0.5 m. Cortesía de LAPEM	87
5.8	Post – proceso en perfiles 3D para la solución de la figura 5.7. Cortesía de LAPEM	87
5.9	Representación en flechas del campo de la figura 5.7. Cortesía de LAPEM.	87
5.10	Discretización de la configuración de la figura 4.1 b, para análisis por el Método del Elemento en la Frontera. Cortesía de LAPEM.	88
5.11	Solución de campo eléctrico obtenida en ELECTRO para la configuración de la figura 4.1 b, con 1115 kV en el electrodo de potencial y 0.5 m entre los electrodos. Cortesía de LAPEM.	88
5.12	Comparación de soluciones obtenidas en ANSYS y ELECTRO para la magnitud del campo en el eje del electrodo. a) En el electrodo de la figura 4.1 a. b) En el electrodo de la figura 4.1 b.	89
5.13	Definición de regiones de comparación de campo eléctrico para el electrodo de la figura 4.1 a, en cada ocasión de descarga.	90
5.14	Comparación de campo eléctrico en las regiones definidas por la figura 5.13, para la configuración de la figura 4.1 a, con diferentes valores para la tensión de rompimiento y distancia entre electrodos.	91
5.15	Definición de regiones de comparación de campo eléctrico para el electrodo de la figura 4.1 b, en cada ocasión de descarga.	92

5.16	Comparación de campo eléctrico en las regiones definidas por la figura 5.15, para la configuración de la figura 4.1 b, con diferentes valores para la tensión de rompimiento y distancia entre electrodos.	93
5.17	Comparación de campo eléctrico calculado con diferentes valores de permitividad relativa, y el campo crítico en condiciones atmosféricas normalizadas, para la configuración de la figura 4.1. a) Electrodo flotado en forma de esfera. b) Electrodo flotado en forma de barra.	96
5.18	Diferencias de cada una de las curvas de la figura 5.17 respecto a la curva correspondiente al campo crítico en condiciones normalizadas. a) Electrodo flotado en forma de esfera. b) electrodo flotado en forma de barra.	96
5.19	Tensiones de rompimiento en condiciones experimentales a nivel de mar, a 1710 msnm y tensión de rompimiento a 1710 msnm calculada según la Guía de Coordinación de Aislamiento de CIGRE, para la configuración de la figura 4.1. a) Electrodo flotado en forma de esfera. b) Electrodo flotado en forma de barra.	100
5.20	Comparación de campo eléctrico crítico: experimental a nivel de mar, a 1710 msnm calculado corrigiendo la permitividad relativa y calculado corrigiendo la tensión de rompimiento según la Guía de Coordinación de Aislamiento de CIGRE, para la configuración de la figura 4.1. a) Electrodo flotado en forma de esfera. b) Electrodo flotado en forma de barra.	101

1.1 Contexto

1.1.1 Sistema de Potencia

El sistema de suministro de energía eléctrica de un país se conoce como "Sistema de Potencia"; el sistema de potencia se compone de una gran variedad de equipos, instalaciones y recursos que tienen como objetivo común asegurar el suministro de energía eléctrica a la sociedad. El sistema de potencia realiza diversas tareas para lograr su objetivo, estas tareas pueden ser clasificadas en tres clases:

- Generación
- Transmisión y
- Distribución

La Generación se compone principalmente de las Centrales Generadoras de Energía Eléctrica cuya función primordial es transformar en energía eléctrica otra manifestación de energía, como puede ser la energía hidráulica en las Centrales Hidroeléctricas. La Transmisión se compone primordialmente de una red de líneas de transmisión (conductores de energía eléctrica soportados en postes o torres en el caso de líneas aéreas, o bien enterrados en líneas subterráneas) que se

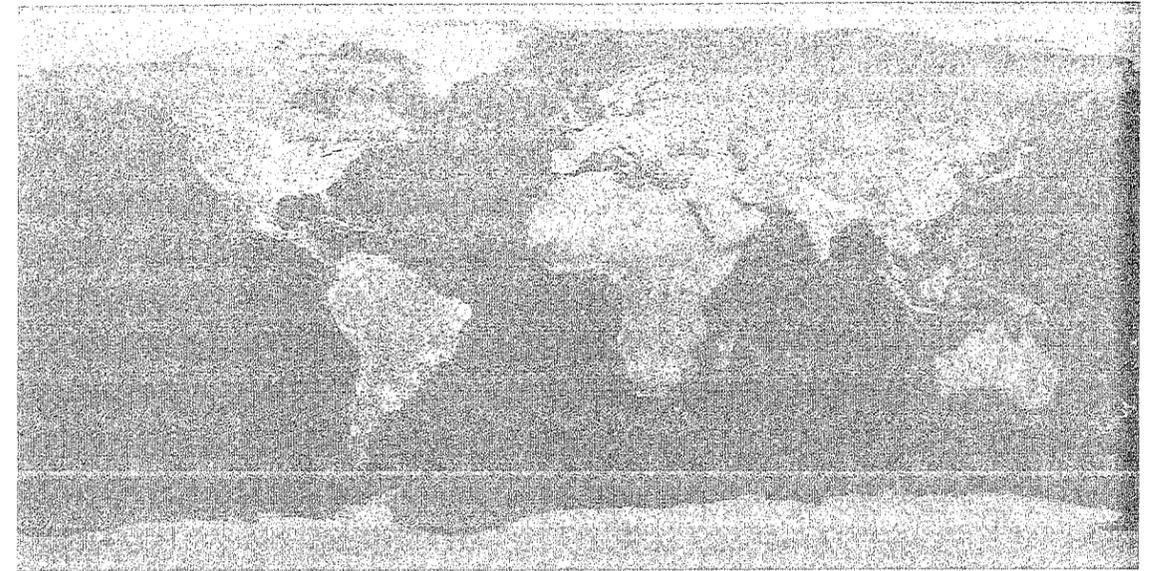


Figura 1.1. Fotografía obtenida desde un satélite, que muestra los niveles de utilización de energía eléctrica en el planeta.

encargan de transportar grandes bloques de energía desde las Centrales Generadoras a los centros de consumo. Por último la fase de Distribución, como su nombre lo indica se encarga de distribuir la energía entre los consumidores.

1.1.2 Retos del Sistema de Potencia

El nivel de consumo de energía eléctrica por persona es aceptado como un indicador de desarrollo de las naciones, este hecho se pone de manifiesto si se observa la figura 1.1, por ejemplo en los países europeos donde el crecimiento demográfico es poco se ve que el consumo de energía eléctrica para iluminación es alto, mientras que en Africa que tiene niveles de crecimiento demográfico alto, la fotografía muestra muy poca utilización de luz eléctrica.

En los países en vías de desarrollo como México la tendencia a aumentar el consumo de energía eléctrica se mantiene mientras se mantenga el proceso de industrialización del país. Si se revisa la historia reciente del consumo de energía eléctrica en el país se comprueba esta situación. En la figura 1.2 se observa que la demanda de energía eléctrica ha estado creciendo cada vez más rápido en el sector industrial, sector que tiene una gran importancia pues representa empleo para un gran número de personas y en general es el pilar de la economía del país, mientras que el

Consumo de Energía por Sector CFE 1988 - 1999

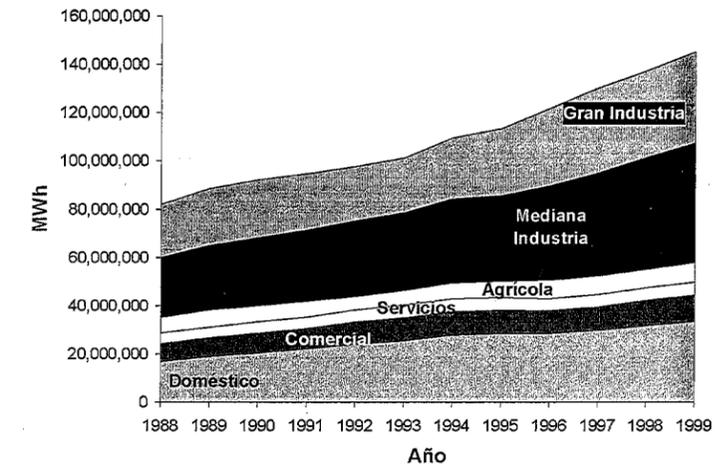


Figura 1.2. Consumo de energía eléctrica por sector 1988-1999

crecimiento en la demanda de energía en los demás sectores ha sido muy pequeño. La figura 1.2 muestra un incremento neto del 77% en las ventas de energía eléctrica del año 1988 al año 1999. Sin embargo el problema surge cuando se compara este crecimiento en la demanda de energía eléctrica con el crecimiento de la capacidad instalada en ese mismo periodo de tiempo, en la figura 1.3, se aprecia que solo se tiene un incremento de 56% en la generación de energía y un 35% en la transmisión (medida en kilómetros de línea de transmisión instalada).

Esta situación implica grandes retos para la gente encargada de mantener el Sistema de Potencia pues se debe aumentar la capacidad del Sistema para garantizar la energía necesaria para que se instalen cada vez más empresas, pero se cuenta con recursos limitados por la propia situación financiera de un país en vías de desarrollo. En México la empresa que se encarga de la gran mayoría del Sistema de Potencia es, de acuerdo al marco legal vigente, una empresa de gobierno: la Comisión Federal de Electricidad (CFE); aunque existe la posibilidad de cierta participación de empresas privadas en la etapa de Generación en lo que respecta a construcción de Centrales Generadoras.

Así pues la CFE se enfrenta al reto de mantener la garantía en el suministro de energía eléctrica y así establecer las condiciones para que la economía del país se mantenga en buen estado a través de la generación de empleos. Este reto se propaga a cada una de las partes del Sistema de Potencia.

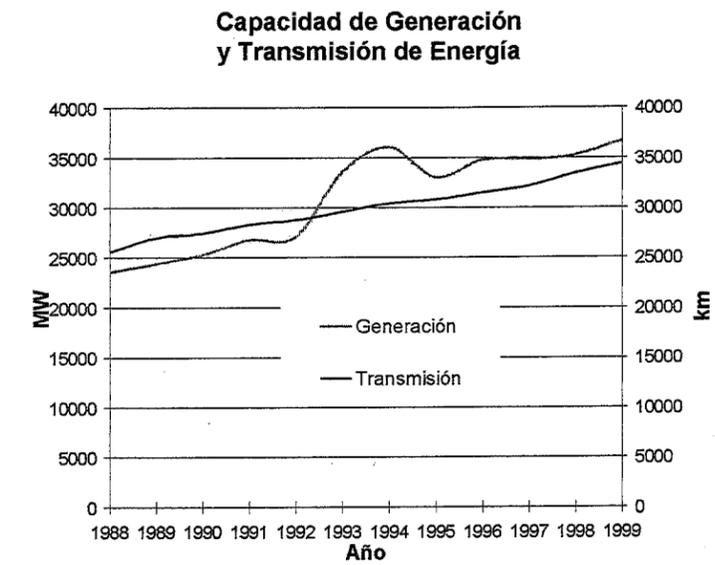


Figura 1.3. Capacidad instalada de generación y transmisión, 1988-1999.

1.1.3 Tendencias Para Hacer Frente a los Retos

La CFE y la Secretaría de Energía de México han estado reaccionando a la crisis energética del país, y estas reacciones se han traducido en un conjunto de acciones de todo tipo que se están llevando a cabo en las tres partes del Sistema de Potencia.

En la parte de Generación, el compromiso es aumentar la capacidad instalada de generación, así como la eficiencia de las Centrales Generadoras. En este sentido, como ya se mencionó existe el concepto de "Cogeneración", que es la participación de empresas privadas en la generación de energía, de esta manera la CFE no tiene que invertir directamente para aumentar el número de Centrales Generadoras, este concepto ha sido de gran ayuda pues ha permitido la construcción de nuevas Centrales Generadoras sin grandes desembolsos de dinero por parte de CFE, tal es el caso de la Central Termoeléctrica Mérida III. En lo que se refiere al aumento de eficiencia en Generación, la CFE se encuentra inmersa en un proceso de mejoramiento del mantenimiento preventivo a las plantas existentes para asegurar su funcionamiento.

En la etapa de Transmisión el reto es aún mayor pues de acuerdo al marco legal vigente solo la CFE puede aumentar la capacidad instalada de Transmisión, lo que representa un gran problema pues el costo de las líneas de transmisión es muy elevado y la construcción de una nueva línea trae consigo algunos problemas derivados. Quizá el problema derivado más importante al construir una nueva línea es la obtención del derecho de vía para esta, y es que de acuerdo a la ley el terreno bajo la línea de transmisión pasa a ser propiedad de la CFE, de modo que si se requiere que una línea de transmisión llegue a un centro de consumo se van a encontrar muchos problemas para obtener los derechos de vía, tanto en las cercanías del centro de consumo por que generalmente se encuentran semi – urbanizadas, como en las áreas rurales donde el terreno se esta utilizando para la agricultura, ganadería u otra actividad. Así pues para aumentar la capacidad instalada de transmisión la CFE se propone aumentar la capacidad de transmisión de energía de las líneas que ya están instaladas mediante un nuevo diseño eléctrico.

Por último en la etapa de Distribución no se encuentran problemas mayores pues se requiere de muy poca inversión para aumentar la capacidad y a menudo los particulares se encargan de ello, entregando luego las instalaciones construidas a la CFE.

1.2 Delimitación del Problema

Este trabajo se realizó en conjunto con la Oficina de Transmisión del Laboratorio de Pruebas a Equipos y Materiales (LAPEM) de la CFE, como parte del proyecto “Línea Viva”, el cual constituye uno de los trabajos de investigación que se están realizando en la CFE para hacer frente a los retos que plantea la situación energética actual en el país, en particular en el área de transmisión del sistema de potencia.

El objetivo del proyecto “Línea Viva” es encontrar las distancias de seguridad, a las que un trabajador puede acercarse a una línea de transmisión energizada. Para lograr este objetivo es necesario encontrar los esfuerzos electromagnéticos alrededor de la línea de transmisión, dichos esfuerzos se deben a la interacción de campos eléctricos y magnéticos con el medio circundante, el cual en las líneas aéreas de transmisión, es justamente el aire.

La situación de que una persona deba acercarse a una línea energizada a realizar algún tipo de trabajo, se hace necesaria cuando la cantidad de energía que se transporta a través de dicha línea es vital para la continuidad del suministro de energía eléctrica, de modo que no es posible desconectar la línea del sistema para realizar ese trabajo; y a su vez ese trabajo se requiere para asegurar que la línea siga transportando la energía eléctrica.

En el estudio de los esfuerzos electromagnéticos en el área cercana a una línea de transmisión, que esta siendo sometida a trabajo de mantenimiento en línea viva, es necesario considerar las condiciones críticas que puedan surgir, con el objetivo de que los esfuerzos calculados sean máximos.

Ya que en los sistemas de transmisión se manejan tensiones muy altas, debido a que en el diseño se busca conducir corrientes pequeñas para atenuar las pérdidas por efecto Joule, los esfuerzos electromagnéticos tienen que ver en su mayor parte con campos eléctricos. Inclusive la condición de trabajo más severa en una línea de transmisión que puede ser sometida a trabajo en línea viva, es una sobretensión de alta frecuencia producida por la operación de un interruptor en el sistema, lo cual provoca altos esfuerzos de campo eléctrico en el aire circundante.

Por otro lado, es necesario tomar en cuenta la influencia de la altitud, ya que se ha encontrado que el comportamiento del aire como dieléctrico varía significativamente a diferentes altitudes [1][2].

En [1] y [2] se utilizaron las configuraciones de trabajo en línea viva para la realización de experimentos de simulación de dichas condiciones de trabajo. Dichos experimentos consisten básicamente en la aplicación de tensiones de impulso a las configuraciones de trabajo en línea viva, para encontrar la magnitud de aquella tensión de impulso que provoca una descarga eléctrica en la configuración. En [1] y [2] se proponen modelos de corrección para los valores de estas magnitudes de tensión de impulso que provocan la descarga, y en [3] se integran todos los resultados obtenidos. Por otro lado en [4] se comparan las correcciones de acuerdo a [3] con experimentos reales y se determina que la exactitud de la corrección llevada a cabo no es del todo aceptable en lugares de gran altitud.

Sin embargo, cabe destacar que hasta el momento, los modelos de corrección con los que se cuenta se aplican para valores de tensión, no para campo eléctrico, de modo que es necesario encontrar una corrección para campo eléctrico ya que la naturaleza de la descarga eléctrica y lo que determina el valor de la tensión a la que se produce la descarga es el campo eléctrico.

El objetivo de este trabajo es el cálculo del campo eléctrico en los modelos que se han diseñado, tomando en cuenta las condiciones críticas de trabajo en línea viva, considerando la influencia que sobre el campo eléctrico pueda tener la altitud del lugar donde se encuentre la configuración de trabajo en línea viva.

1.3 Solución Propuesta

Para calcular del campo eléctrico se requiere resolver su modelo matemático, que es una ecuación diferencial parcial actuando en un cierto dominio y sujeta a ciertas condiciones de frontera, para lo cual se utilizaron métodos numéricos en concreto el Método del Elemento Finito y el Método del Elemento en la Frontera.

Para considerar el efecto de la altitud sobre el campo eléctrico, se propuso que la diferencia de comportamiento en los experimentos se debe a la variación del parámetro del modelo matemático del campo eléctrico: permitividad relativa, con las condiciones físicas del aire a diferentes altitudes.

Con el objeto de verificar la explicación propuesta, se realizaron cálculos de campo eléctrico en diferentes configuraciones, las cuales tienen en común que en las condiciones en las que se calculó el campo eléctrico se presentó una descarga. Se encontró que aún cuando los parámetros de la configuración de trabajo en línea viva, como tensión aplicada y distancias varían, siempre que se produce una descarga se presenta la misma distribución de campo eléctrico, lo que se denominó campo eléctrico crítico.

Posteriormente, se compararon los campos eléctricos calculados con diferentes valores de permitividad relativa para el aire con el campo crítico al nivel del mar, ya que en estas condiciones el valor de la permitividad relativa es conocido. De esta manera se encontró un valor experimental para la permitividad relativa del aire a gran altitud (1710 msnm). Luego se utilizó la teoría microscópica de los dieléctricos gaseosos para proponer un método de cálculo de este valor de manera analítica, y aplicándolo, se encontraron valores similares.

Con los resultados obtenidos quedan establecidas las bases para continuar con la investigación de "Línea Viva", en particular se propone como trabajo futuro el cálculo del campo en geometrías complejas como ventanas de torres de transmisión y trabajo en línea viva desde helicóptero; así como también la determinación de trayectorias de descarga dado el campo; y la simulación dinámica de campo electromagnético.

1.4 Motivación y Beneficios

El principal motivo por el cual se buscó la realización de un trabajo de este estilo, es la aplicación de las técnicas numéricas disponibles para la simulación de fenómenos físicos, en problemas relacionados con la ingeniería eléctrica. Ya que, a pesar de que técnicas como el Método del Elemento Finito, se ha aplicado ampliamente en problemas de ingeniería mecánica e ingeniería civil con éxito desde hace algún tiempo, en problemas relacionados con la ingeniería eléctrica esto no ha sucedido así.

Con este propósito se buscó y se consiguió la cooperación de LAPEM en este trabajo, y de esta manera se cumplió el objetivo de utilizar las técnicas numéricas y se colaboró en un trabajo de investigación de aplicación real, que llegado el momento servirá para especificar las condiciones de trabajo en línea viva, de manera que este trabajo sea llevado a cabo de manera segura y con esto contribuir al desarrollo del sistema de potencia del país.

1.5 Organización del Trabajo

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo dos, se introduce el concepto de trabajo en línea viva, para después presentar la modelación física de estas situaciones, ya que precisamente estos modelos de la física del trabajo en línea viva, son los que se utilizarán en este trabajo. También se presenta el fundamento electromagnético de los experimentos de simulación de trabajo en línea viva, así se revisa el concepto de campo eléctrico, de potencial eléctrico, el comportamiento de los materiales en presencia de campos eléctricos, la naturaleza de la ruptura dieléctrica, haciendo especial énfasis en la ruptura dieléctrica en los gases, así como en la naturaleza microscópica del parámetro que define en gran parte el comportamiento de un dieléctrico, es decir la permitividad relativa. También se desarrolla el modelo matemático que gobierna el campo eléctrico estático, es decir la ecuación de Poisson. De esta manera, el capítulo dos sirve como base tanto al capítulo tres, donde se revisan los métodos de solución a la ecuación del campo; como al capítulo cuatro, donde se aplica la teoría microscópica de los dieléctricos.

En el capítulo tres, se describen algunos métodos de solución a ecuaciones diferenciales parciales, como la ecuación de campo eléctrico. En general se menciona que este tipo de ecuaciones

generalmente se debe resolver por métodos aproximados, debido a la complejidad de los modelos que describen, y se hace énfasis en los dos métodos que se utilizan en este trabajo. Así pues, se presenta la formulación del Método del Elemento Finito para la solución de la ecuación de campo eléctrico y la formulación del Método del Elemento en la Frontera para este mismo fin.

En el capítulo cuatro se presenta una revisión de los trabajos que se han hecho para tratar de resolver el problema planteado, así como se mencionan los casos en los que las correcciones al modelo a que se ha llegado en estos trabajos no funcionan del todo bien, para luego diseñar una estrategia para resolver este problema haciendo uso de los métodos presentados en el capítulo tres y la teoría microscópica de los dieléctricos gaseosos del capítulo dos. En este capítulo, además se revisan algunos aspectos prácticos de la utilización del Método del elemento Finito y del Método del Elemento en la Frontera en problemas electrostáticos.

En el capítulo cinco se presenta la estrategia que se siguió para la solución del problema, y los resultados que se obtuvieron, así como la comparación del trabajo realizado con la corrección clásica que se menciona en el capítulo cuatro.

Por último en el capítulo seis se puntualizan las conclusiones que se fueron obteniendo en el transcurso del trabajo, así como algunas aplicaciones y trabajo futuro en el tema.

Capítulo 2. Comportamiento de los Dieléctricos en la Simulación del Trabajo en Línea Viva.

2.1 El Trabajo en Línea Viva

En [5] se describe el Trabajo en Línea Viva como un término que se utiliza en el ambiente de Ingeniería Eléctrica para describir todas las operaciones que se realizan en las líneas eléctricas ya sea de distribución o de transmisión manteniendo energizada la línea. Los métodos de Trabajo en Línea Viva se pueden clasificar en dos clases, las técnicas de "distancia" y las de "contacto". En las técnicas de distancia el trabajador permanece a potencial de tierra y realiza el trabajo mediante alguna herramienta convenientemente aislada, a la cual se le conoce como "punta caliente"; y en las técnicas de contacto el trabajador está conectado al conductor y debidamente aislado de tierra, por lo que a esta técnica también se le conoce como "sistema a mano desnuda".

El Trabajo en Línea Viva se hace necesario cuando existe la necesidad de mantener la continuidad del servicio de energía eléctrica, y se requiere realizar trabajos de mantenimiento en líneas de transmisión que por su capacidad de transporte de energía no pueden ser desconectadas, de modo que todo trabajo que se requiera en ellas habrá que realizarlo en Línea Viva.

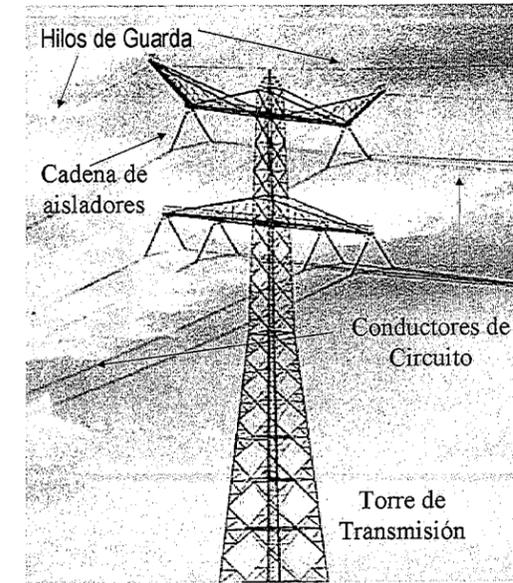


Figura 2.1. Torre de transmisión de energía eléctrica de doble circuito.

Las líneas de transmisión aéreas se componen de un conjunto de torres de transmisión sosteniendo un juego de tres conductores ya sea sencillos o múltiples por cada circuito que soportan y un par de conductores de acero que se denominan de "guarda". Los conductores de circuito están debidamente sostenidos y aislados de la torre mediante aditamentos de material aislante que reciben el nombre de cadenas de aisladores. En la figura 2.1 se muestra una torre de transmisión aérea con doble circuito, cada circuito consta de seis conductores, dos por cada fase. Se tienen tres fases por cada circuito debido a que la energía eléctrica se genera, transmite y utiliza siguiendo un modelo en el que cada conductor (en el caso de la figura 2.1 un conductor esta compuesto por dos cables) transporta una señal de tensión eléctrica desfasada 120° respecto a la señal que transportan los demás, a este sistema se le denomina Sistema Trifásico y es el sistema eléctrico que se utiliza en todo el mundo. Los conductores de guarda ofrecen un camino de baja resistencia a las descargas atmosféricas o rayos, ya que se encuentran conectados a un electrodo en tierra, ofreciendo de esta manera cierta protección a los conductores de circuito.

El trabajo que requiere una línea de transmisión es con mayor frecuencia el reemplazo de las cadenas de aisladores. Este tipo de trabajo requiere en primer lugar que los trabajadores se transporten a la cadena de aisladores en la línea de transmisión. Cuando la torre que contiene la cadena con elementos dañados es de fácil acceso, esto se realiza generalmente trepando la torre, sin embargo existen casos en que por la dificultad en el acceso a la torre es necesario utilizar un helicóptero o bien llegar a una torre de fácil acceso y luego transportare por la misma línea a la torre con el problema. Ya sea que se utilicen técnicas de contacto o de distancia la situación que

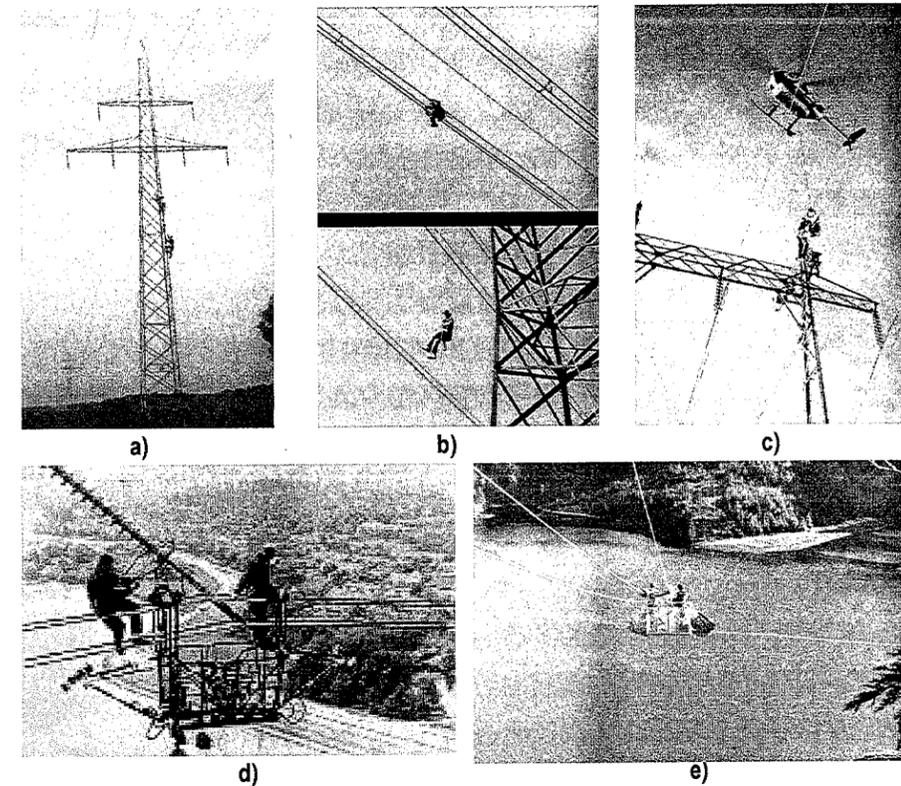


Figura 2.2. Trabajo en línea viva: a) hombres subiendo a una torre de doble circuito, b) hombre descolgando desde la línea después de hacer trabajo de contacto, c) trabajo con helicóptero, d) trabajo en las cadenas de aisladores, e) trabajo y traslado en plataforma por las líneas.

se tiene es la de la inclusión de un objeto conductor extraño (que puede ser un helicóptero, una herramienta o el propio trabajador en un traje conductor) en el ambiente de la línea de transmisión energizada. La figura 2.2 muestra algunas situaciones de trabajo en línea viva.

Debido a las características del Trabajo en Línea Viva, este implica tres clases de problemas:

- Eléctricos. Consisten obviamente en asegurar las condiciones de trabajo. Esto implica el conocimiento de las sobretensiones que pueden ocurrir en la línea de transmisión. Además se debe conocer la rigidez dieléctrica de los gaps (distancia entre dos conductores a diferente tensión) de aire, de las cadenas de aisladores (incluido el caso de cadenas dañadas), herramientas aisladas, puntas, cuerdas, etc., también deben ser tomados en cuenta las condiciones climáticas como contaminación, humedad, lluvia, altitud.
- Mecánicos. Las diferentes piezas de equipo usado en el Trabajo en Línea Viva deben soportar los esfuerzos de tensión y compresión mecánica a la que serán sometidos.

- Fisiológicos. Se debe asegurar que la exposición del ser humano a campos eléctricos y magnéticos, así como el paso de pequeñas corrientes eléctricas a través del cuerpo no tengan consecuencias.

Todos estos problemas se deben tomar en cuenta al preparar procedimientos de trabajo, en el diseño de herramienta y equipo para Trabajo en Línea Viva, así como en el propio diseño de las líneas de transmisión.

En este trabajo se van a considerar únicamente los problemas eléctricos. De modo que para tratar de resolverlos, es importante investigar el comportamiento del aislamiento externo (aire) sujeto a las condiciones de trabajo críticas tomando en cuenta todos los factores que pueden verse involucrados en el trabajo en línea viva.

2.2 Condiciones Críticas de Trabajo en Línea Viva

Las condiciones críticas que el aislamiento de una línea de transmisión debe soportar son las sobretensiones transitorias. Las sobretensiones transitorias que se pueden presentar en una línea de transmisión pueden ser de dos tipos:

- Sobretensiones de descarga atmosférica. Se pueden presentar en el hilo de guarda ó en los conductores.
- Sobretensiones de maniobra. Se deben generalmente a una operación de apertura o cierre de un interruptor en la línea.

Con el fin de estudiar el comportamiento de los equipos eléctricos cuando se presentan estas perturbaciones, estas se han medido y modelado de diferentes maneras, una de las más utilizadas con propósitos de prueba es el modelo de impulso doble exponencial, que se obtiene al tomar la diferencia entre dos ondas exponenciales

$$v(t) = k(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad (2.1)$$

Mediante los parámetros α y β se controla el tiempo en que la onda de impulso alcanza su valor máximo (tiempo a la cresta) y el tiempo en que el impulso decae a un 50% de su valor máximo (tiempo a la cola); estos dos valores: tiempo a la cresta (T_S) y tiempo a la cola (T_R) se utilizan para caracterizar los impulsos modelados como impulsos de rayo o de maniobra con el formato T_S/T_R . La figura 2.3 muestra un impulso doble exponencial.

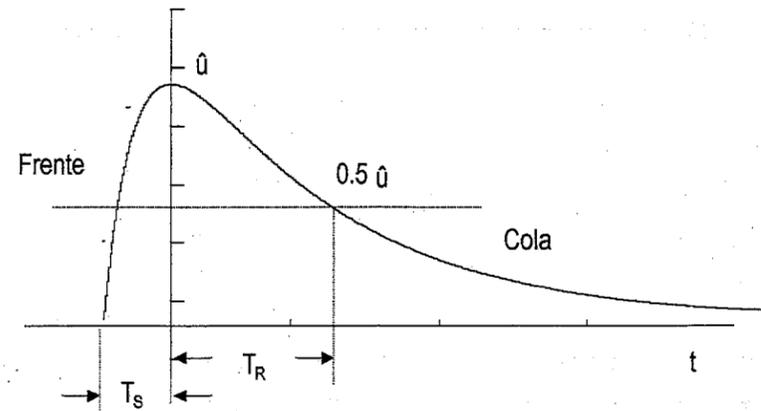


Figura 2.3. Impulso doble exponencial.

Para los impulsos de rayo el tiempo a la cresta es de aproximadamente $1\mu s$ y el tiempo a la cola de $50\mu s$, de modo que son impulsos 1/50. Por otro lado los impulsos de maniobra son 250/2500.

Con el objetivo de estudiar las condiciones de trabajo en línea viva, no es necesario considerar impulsos de rayo, ya que estos modelan los efectos de los rayos que se presentan durante tormentas eléctricas y es suficiente con no realizar trabajo en línea viva si se presentan condiciones de tormenta eléctrica en las inmediaciones de la línea.

Por otro lado las perturbaciones debidas a impulsos de maniobra salen de todo control ya que generalmente la operación de los interruptores en la línea, que es lo provoca estas sobretensiones, es automática y opera de acuerdo a las necesidades del sistema de potencia. Por lo que esta condición de trabajo se debe estudiar con sumo cuidado y considerársele al estudiar el comportamiento del aislamiento de la línea sometida a trabajo en línea viva.

Por otro lado es necesario mencionar que de acuerdo a las características del trabajo en línea viva, existen dos situaciones de aislamiento que deben considerarse:

- Gaps de aire que contienen elementos conductores flotados (que como ya se menciono puede ser una herramienta, o el propio trabajador en un traje conductor)
- Las cadenas de aisladores con unidades dañadas

En este trabajo se van a tomar de base las condiciones que involucran los gaps con elementos conductores en medio para cuestiones de modelación y simulación, sin embargo los resultados obtenidos al tratarse de campo eléctrico pueden ser aplicados a las dos condiciones.

2.3 Simulación de Trabajo en Línea Viva

Para entender el comportamiento del aislamiento externo en las líneas de transmisión que se someten a trabajo en línea viva es necesario realizar cierta experimentación de las condiciones de trabajo. Sin embargo debido a la compleja geometría que implica una línea de transmisión es imposible realizar la experimentación sobre la propia línea, se hace necesario el diseño de configuraciones simples para simular la línea de transmisión y las condiciones de trabajo en línea viva.

Con el objeto de diseñar los modelos de experimentación es necesario conocer la influencia de todos los factores que se ven involucrados en el trabajo en línea viva. En [5] se estudia la influencia de estos factores para el caso tanto de objetos conductores insertados en el ambiente de una línea de transmisión, como de cadenas de aisladores con unidades dañadas. Como ya se mencionó para cuestiones de simulación en este trabajo se considerará únicamente el caso de objetos conductores cerca de la línea de transmisión. Las conclusiones a que se llega en [5] considerando que se tomará en cuenta la condición crítica de trabajo en línea viva mediante el uso de impulsos de maniobra, son:

- Tensión de CA presente en la línea. La influencia de la tensión de CA presente en la línea no es significativa.
- Polaridad del impulso. Los impulsos de polaridad positiva son más severos que los de polaridad negativa, de modo que para considerar condiciones críticas, es necesario considerar impulsos de polaridad positiva.
- Forma del Impulso. Con los resultados disponibles en [5] no fue posible observar un corrimiento del tiempo crítico a la cresta, por lo que no se obtuvo una conclusión respecto a la forma del impulso.
- Protuberancias en el objeto. Para un electrodo en forma de esfera de 5 m de diámetro, una protuberancia de 1 mm fue suficiente para reducir su rigidez dieléctrica en un 20 %. Debido a que no es posible asegurar que los electrodos no contienen protuberancias (debidas a contaminación o imperfecciones del material), y al enorme efecto de estas en el comportamiento del aislamiento, se considera que todos los electrodos contienen protuberancias.
- Posición del objeto en el gap. Un objeto que contiene protuberancias mantiene un efecto de atracción respecto del electrodo energizado en un volumen aproximado que ocupa una esfera

de diámetro igual a la longitud del gap. Para considerar las condiciones críticas se debe considerar que el objeto esta en el mismo eje que el electrodo energizado.

- Forma del objeto. Se determinó que el efecto de la geometría del objeto es importante en el comportamiento del aislamiento, especialmente si el objeto tiene una gran longitud (medida a lo largo del eje del electrodo) y una gran sección cruz (medida en dirección perpendicular al eje del electrodo)

Tomando en cuenta esta información en [6] se define la configuración básica de electrodos para simular las condiciones de trabajo en línea viva. Esta configuración esta basada en el electrodo punta plano, con la adición de una esfera conductora entre los electrodos. La configuración se compone de una esfera flotante de diámetro d_0 con una protuberancia de longitud l_p en un electrodo punta plano de longitud d , expuesto a un impulso de maniobra de polaridad positiva. La esfera flotante esta colocada con su eje coincidiendo con el eje del electrodo. Una variante a esta configuración básica, que consiste en reemplazar la esfera flotante por una barra flotante en el eje del electrodo [6][4], esta configuración también fue utilizada en este trabajo. En ambos casos el material aislante alrededor de los electrodos es aire. La figura 2.4 a muestra el electrodo con la esfera flotada y la figura 2.4 b muestra el electrodo con la barra flotada.

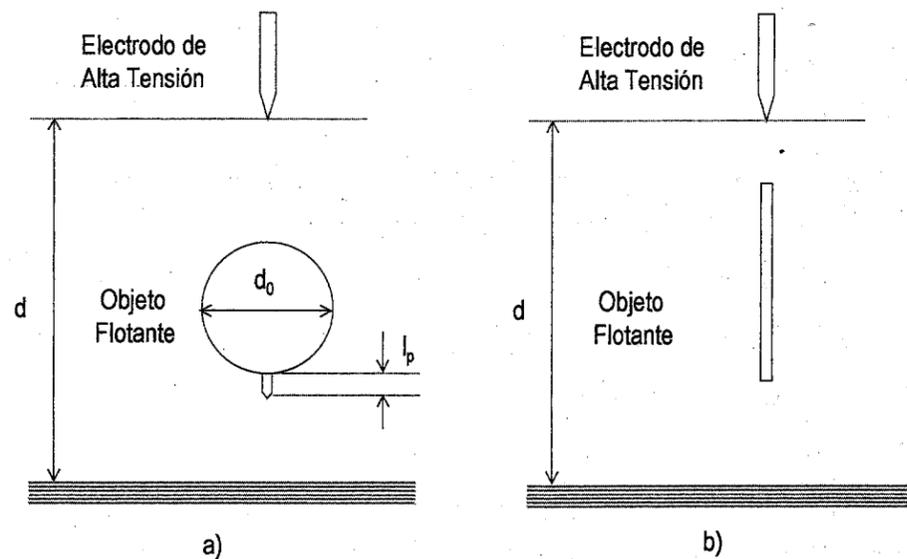


Figura 2.4 Electrodo utilizado para simular las condiciones de trabajo en línea viva. a) Objeto flotado en forma de esfera. b) Objeto flotado en forma de barra.

La experimentación con estos electrodos consiste básicamente en la aplicación de impulsos de magnitud variable para determinar la magnitud del impulso a la que se produce una descarga eléctrica entre los electrodos, lo que se conoce en el ambiente de Ingeniería Eléctrica como "rompimiento" del dieléctrico o del aislamiento, en este caso el aire, y a la tensión a la que se produce el rompimiento se le conoce como "tensión de ruptura".

Ahora bien, bajo la aplicación de tensiones de impulso, la tensión de rompimiento de un gap de aire exhibe variaciones estadísticas debidas a efectos de atraso de tiempo, que serán tratadas más adelante. Consecuentemente cuando se aplica a un gap repetidamente impulsos de amplitud constante, existe una cierta probabilidad de ruptura. De la función de probabilidad que describe estas variaciones, se determinan los siguientes parámetros:

U_{50} = Magnitud del impulso con la que se obtiene una probabilidad de rompimiento del 50%.

U_{100} = La magnitud más baja del impulso a la cual se presenta siempre un rompimiento.

σ = desviación estándar de la tensión de ruptura

$COV = \frac{\sigma}{U_{50}}$ Coeficiente de variación de la tensión de ruptura

El rompimiento del dieléctrico se debe a una serie de cuestiones que tienen que ver con la naturaleza del propio dieléctrico y como reacciona al campo eléctrico. Es necesario entonces describir la física del campo eléctrico para estudiar la reacción de los diferentes materiales. En el resto del capítulo se estudia tanto la definición del propio campo eléctrico, como la naturaleza de los materiales y en especial de los gases.

2.4 Fundamento Físico de la Simulación del Trabajo en Línea Viva

En electrostática hay dos cantidades de campo vectoriales fundamentales: campo eléctrico E y densidad de flujo eléctrico (o desplazamiento eléctrico) D . Estas cantidades fueron deducidas experimentalmente de los experimentos de Coulomb y Gauss, entre otros científicos e ingenieros. Finalmente fue Maxwell quien formuló matemáticamente las diferentes leyes experimentales en lo que se conoce como ecuaciones de Maxwell, que constituyen el principio básico del electromagnetismo.

2.4.1 Campo Eléctrico

Al ser el campo eléctrico una cantidad vectorial, queda definido en función de su intensidad y su dirección.

La intensidad de campo eléctrico se define como la fuerza por unidad de carga que experimenta una carga de prueba estacionaria muy pequeña al colocarse en una región donde existe un campo eléctrico, es decir:

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \left(\frac{V}{m} \right) \quad (2.2)$$

La intensidad de campo eléctrico es entonces proporcional a la fuerza \mathbf{F} y tiene su misma dirección. Si \mathbf{F} se mide en newtons (N) y q en coulombs (C), \mathbf{E} tiene unidades de newtons por coulomb (N/C) lo que equivale a volts por metro (V/m).

Los dos postulados fundamentales de la electrostática en el espacio libre especifican la divergencia y el rotacional de \mathbf{E} :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.4)$$

Donde ρ_v es la densidad volumétrica de carga y ϵ_0 es una constante que se como como permitividad eléctrica del espacio libre.

2.4.2 Potencial Eléctrico

Ahora bien, se conoce que sí el rotacional de un campo vectorial es nulo, este puede ser descrito como el gradiente de un campo escalar, por lo que:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.5)$$

Este campo escalar V se conoce como potencial eléctrico ó tensión eléctrica. El signo negativo aparece para respetar el principio de conservación de la energía ya que el significado físico del potencial eléctrico tiene que ver con el trabajo que se realiza al desplazar una carga de un punto a otro.

2.4.3 Medios Materiales

Los materiales usualmente se clasifican en tres tipos según sus propiedades eléctricas: conductores, semiconductores y aislantes (o dieléctricos). Considerando un modelo atómico básico para un átomo consistente en un núcleo con carga positiva y los electrones orbitando a su alrededor, los electrones en las capas más externas de los átomos de los conductores están unidos débilmente y emigran con facilidad de un átomo a otro. La mayoría de los metales pertenece a ese grupo. Los electrones de los átomos de los aislantes o dieléctricos están confinados a sus órbitas; en circunstancias normales no pueden liberarse, ni siquiera con la aplicación de un campo eléctrico externo. Las propiedades eléctricas de los semiconductores están entre las de los conductores y las de los aislantes, ya que poseen un número relativamente pequeño de cargas que pueden moverse libremente.

2.4.4 Polarización

Aunque las moléculas de los dieléctricos son neutras a escala macroscópica, la presencia de un campo eléctrico externo hace que se aplique una fuerza a cada partícula cargada y produce pequeños desplazamientos de las cargas positivas y negativas en direcciones opuestas. Los desplazamientos aunque pequeños en comparación con las dimensiones atómicas, polarizan el material dieléctrico y crean dipolos eléctricos como se ilustra en la figura 2.5. Ya que los dipolos inducidos tienen potencial eléctrico e intensidad de campo no nulas modifican el campo eléctrico dentro y fuera del material dieléctrico.

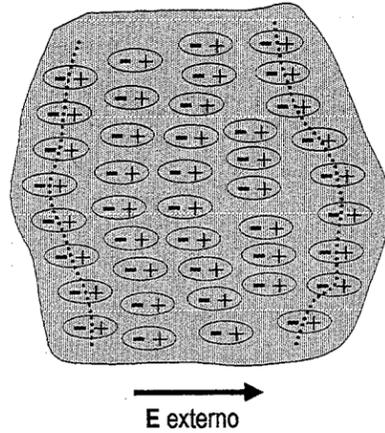


Figura 2.5. Corte transversal de un medio dieléctrico polarizado

Para analizar el efecto macroscópico de los dipolos inducidos se define un vector de polarización \mathbf{P} como

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k}{\Delta V} \left(\frac{C}{m^2} \right) \quad (2.6)$$

Donde n es el número de moléculas por unidad de volumen y el numerador representa la suma vectorial de los momentos dipolares inducidos que están contenidos en un volumen muy pequeño ΔV . El vector \mathbf{P} , una función puntual promediada, es la densidad de volumen del momento dipolar eléctrico.

Se puede obtener una interpretación física más clara de los dipolos inducidos si se consideran los efectos de superficie y volumen del vector de polarización:

- Densidad de carga de polarización equivalente:

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \quad (2.7)$$

- Densidad volumétrica de carga de polarización equivalente:

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.8)$$

2.4.5 Densidad de Flujo Eléctrico

Puesto que un dieléctrico polarizado da lugar a una densidad volumétrica de carga equivalente ρ_{pv} es de esperar que la intensidad de campo eléctrico en un dieléctrico debido a una distribución de fuentes dada sea diferente de la intensidad de campo en el espacio libre. Específicamente se requiere modificar la ecuación 2.3 para incluir el efecto de ρ_{pv} quedando

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_v + \rho_{pv}) \quad (2.9)$$

Usando la ecuación 2.8 tenemos

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v \quad (2.10)$$

Con lo que se puede definir una nueva cantidad fundamental de campo, la densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico, \mathbf{D} , como

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.11)$$

El uso del vector \mathbf{D} permite establecer una relación de divergencia entre el campo eléctrico y la distribución de cargas libres, sin tratar de manera explícita con el vector de polarización \mathbf{P} ni con la densidad de cargas de polarización. De manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (2.12)$$

2.4.6 Susceptibilidad Eléctrica y Constante Dieléctrica

Cuando las propiedades eléctricas del medio son lineales e isotropas, la polarización es directamente proporcional a la intensidad de campo eléctrico y la constante de proporcionalidad es independiente de la dirección del campo

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (2.13)$$

donde χ_e es una cantidad sin dimensiones llamada susceptibilidad eléctrica. Un medio dieléctrico es lineal si χ_e es independiente de \mathbf{E} , y es homogéneo si χ_e es independiente de las coordenadas espaciales. Sustituyendo la ecuación 2.13 en la ecuación 2.11 se obtiene

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad (2.14)$$

Donde

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (2.15)$$

Es una cantidad adimensional conocida como permitividad relativa o constante dieléctrica del medio. El coeficiente $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ es la permitividad absoluta y se mide en farads por metro (F/m).

2.4.7 Ruptura y Rigidez Dieléctrica

Si el campo eléctrico al que se somete a un material dieléctrico es muy fuerte, puede sacar a los electrones de sus moléculas. Estos electrones se acelerarán bajo la influencia del campo eléctrico, chocando violentamente con la estructura molecular del material. Eventualmente puede presentarse el fenómeno de ionización en avalancha lo que puede convertir al material en conductor y pueden surgir corrientes eléctricas muy fuertes. Este fenómeno se conoce como ruptura dieléctrica y la intensidad máxima de campo eléctrico que puede resistir un material dieléctrico sin que se presente una ruptura se le conoce como rigidez dieléctrica del material.

A manera de resumen es conveniente repetir las ecuaciones que nos permitirán resolver el campo eléctrico en las condiciones experimentales mencionadas:

- Las ecuaciones fundamentales de la electrostática en el espacio libre:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.4)$$

- Por la naturaleza irrotacional de \mathbf{E} , este se puede definir a través del campo escalar potencial eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.5)$$

- En un medio lineal e isotrópico, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ y la ecuación 2.12 se convierte en

$$\nabla \cdot \epsilon\mathbf{E} = \rho_v \quad (2.16)$$

- Substituyendo la ecuación 2.16 en la ecuación 2.12 se obtiene

$$\nabla \cdot (\epsilon\nabla V) = -\rho_v \quad (2.17)$$

- Si ϵ es independiente de la posición

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (2.18)$$

A la ecuación 2.18 se le conoce como ecuación de Poisson.

2.5 Física de la Descarga entre Electrodoes en un Aislamiento Gaseoso

2.5.1 Ionización

Sí se aplica una diferencia de tensión eléctrica entre dos electrodos separados por un aislamiento gaseoso, se establece un campo eléctrico en el medio y puede existir un flujo de corriente eléctrica únicamente sí existen partículas cargadas en el medio gaseoso. Estas partículas pueden incluir:

- Electrones (carga negativa): e^-
- Iones positivos (átomos neutrales a los que les falta un electrón): $A^+ = A - e^-$
- Iones negativos (átomos neutrales con exceso de electrones): $A^- = A + e^-$

A la producción de estas partículas cargadas se le conoce como ionización. La ionización tiene lugar debido a la concentración de energía extra en los átomos o moléculas del gas por el campo eléctrico presente. Si la energía absorbida por un átomo es menor que un cierto umbral para ese átomo, el átomo se excita, es decir aunque no expulsa electrones al medio, algunos electrones saltan al siguiente nivel de energía u órbita, de acuerdo a la teoría de Bohr. Normalmente los átomos excitados no son estables y pueden absorber aún más energía para expulsar electrones y convertirse en iones o bien radiar energía absorbida en forma de fotones para regresar al estado inicial.

Los mecanismos de producción de partículas cargadas o ionización son diversos y se estudian a fondo en [7], sin embargo los más importantes en las condiciones del experimento con el que se está trabajando es la ionización por impacto y la separación de electrones.

La ionización por impacto se produce al aplicar un campo eléctrico con un electrón libre en el medio, este electrón gana energía del campo y choca con átomos o moléculas neutras del gas en el medio. Si la energía del electrón es menor que la energía de ionización del átomo o molécula neutral el choque producido es un choque elástico. Pero si la energía del electrón es mayor que la energía de ionización del átomo o molécula neutral el choque es no elástico y causa la ionización del átomo o molécula neutral del gas. En cada choque no elástico se produce un ion positivo y un electrón libre extra.

La separación de electrones se lleva a cabo a partir de iones negativos, al liberar estos el exceso de electrones para producir un átomo neutral y electrones libres. Aunque no es un proceso mediante el cual se aumente el número de partículas cargadas, se le considera un mecanismo de ionización ya que produce electrones libres de movimiento rápido en el medio en lugar de iones negativos de movimiento lento. Con este cambio la ionización por impacto aumenta.

2.5.2 Rompimiento en Campos Uniformes

La aplicación de un campo eléctrico E a través de un dieléctrico gaseoso resulta primero en la ionización de este. Con el incremento de la intensidad de campo o el tiempo, la ionización puede llevar a otros procesos físicos como se muestra en la figura 2.6. El crecimiento exponencial de la ionización generalmente conduce a la formación de una avalancha y eventualmente producir la formación del streamer, líder, chispa, arco o plasma. El campo eléctrico puede ser uniforme o no uniforme dependiendo del arreglo del electrodo, para las variaciones del electrodo punta plano que se están utilizando en este trabajo el campo eléctrico es no uniforme. La diferencia entre el campo uniforme y el no uniforme radica en que para el campo uniforme el esfuerzo que el campo produce en el dieléctrico es el mismo en cualquier lado y por lo tanto los parámetros de ionización y des-ionización son constantes, lo que no es cierto en el caso de campos no uniformes. Sin embargo la física del rompimiento es más fácil de entender y puede tomarse de base para explicar el rompimiento en campos no uniformes. La teoría del rompimiento en campos uniformes más aceptada es la teoría del streamer.

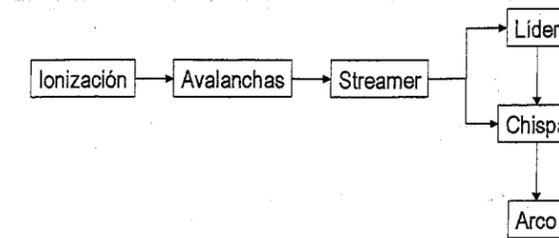


Figura 2.6. Los Posibles procesos de descarga en un aislamiento gaseoso

2.5.3 Teoría del Streamer

La teoría del streamer se puede describir cualitativamente con la ayuda de la figura 2.7

1. En el gap de campo uniforme de la figura 2.7 se observa una avalancha de electrones, esta consiste de electrones de movimiento rápido y iones negativos de movimiento lento. Por consiguiente se forma un espacio de cargas en oposición al campo principal. Pronto los electrones son absorbidos por el ánodo dejando una acumulación de iones positivos. También se lleva a cabo un proceso de excitación de algunos átomos como resultado de los choques durante la avalancha primaria y estos emiten algunos fotones de acuerdo a la teoría de Bohr.
2. Los fotones son absorbidos por los átomos del gas y se producen fotoelectrones en el gas a distancias varias desde la avalancha (figura 2.7 a). Si el espacio de cargas que se menciona en el punto 1 es del mismo orden en magnitud que el campo original aplicado, entonces algunos de los fotoelectrones producen una segunda generación de avalanchas auxiliares.
3. Como se forman avalanchas auxiliares, eventualmente se producen más fotones y fotoelectrones, de modo que se genera una tercera generación de avalanchas auxiliares (figura 2.7 b). Los electrones ya no siguen las líneas de campo originales debido a que estas son distorsionadas por el campo del espacio de cargas. Además, se pueden crear simultáneamente muchas avalanchas; esta es la razón de la ramificación y zigzagueo que se observan en la dirección de los canales de la descarga (figura 2.7 c). Las avalanchas auxiliares son absorbidas continuamente por la avalancha primaria y el espacio de carga de iones positivos crece hacia el cátodo. Por lo tanto el canal de ionización se extiende desde el ánodo hasta el cátodo. Al canal de ionización se le denomina streamer. La punta del streamer forma ramas como resultado de la absorción de las avalanchas (figura 2.7 b). Los electrones en la punta son absorbidos por el streamer y se mueven en el canal hacia el ánodo debido a un gradiente de potencial en el interior del canal de streamer.

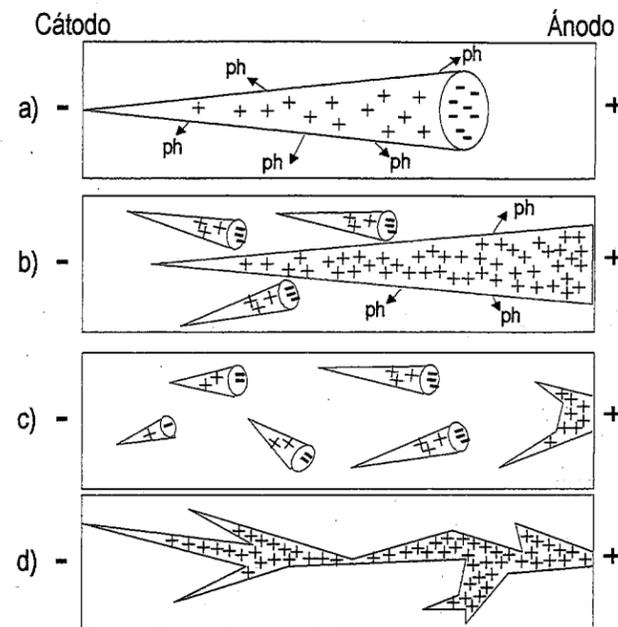


Figura 2.7. El Desarrollo desde una avalancha a un streamer en un campo eléctrico uniforme (+ = iones positivos, - = electrones, ph = fotones emitidos desde la avalancha).

- La propagación de una punta del streamer continúa mientras que muchas otras son detenidas por la falta de avalanchas que las alimenten como se muestra en la figura 2.7 c. Si el proceso continúa, se formará un streamer final entre el ánodo y el cátodo causando una descarga completa. El canal de descarga será similar al mostrado en la figura 2.7 d con muchas ramas "incompletas".

2.5.4 Rompimiento en Campos no Uniformes

Cuando la configuración de los electrodos produce un campo no uniforme, los parámetros de ionización no son constantes y por tanto el esfuerzo que el campo produce en el gas no es igual en todos lados. Por lo tanto si la magnitud del campo es grande se producirán descargas en aquellas regiones donde el esfuerzo producido sea mayor que la rigidez dieléctrica del gas. Este fenómeno se conoce como descarga parcial y cuando ocurre en electrodos en aire u otros gases recibe el nombre de "efecto corona" o simplemente "corona".

En presencia de un campo no uniforme el efecto corona juega un importante papel en la descarga a través del gap, así que la tensión de ruptura se ve altamente influenciada por la presencia o ausencia del efecto corona.

Una vez que el efecto corona comienza en el electrodo, el campo eléctrico aplicado se distorsiona por el campo del espacio de carga, por tanto el proceso de descarga se vuelve más complejo. Si el electrodo con mayor esfuerzo es el positivo, el espacio de carga actúa como una extensión del ánodo. Por otro lado si el electrodo con mayor esfuerzo es el cátodo, el espacio de carga actúa como un escudo que decrementa el campo en su vecindad, de modo que esta configuración requiere una tensión mayor para lograr una descarga completa. Consecuentemente en campos no uniformes la tensión de ruptura es menor si es de polaridad positiva que si es de polaridad negativa. Este resultado coincide con las conclusiones obtenidas en [5] respecto a las condiciones críticas de trabajo en línea viva, en lo que se requiere a la polaridad del impulso.

Como ya fue mencionado, existe un retraso de tiempo al impulso que provoca una variación probabilística de la tensión de ruptura cuando se somete al gap a tensiones de impulso. Este retraso de tiempo se puede dividir en dos partes: retraso estadístico y retraso formativo. El retraso estadístico es el tiempo necesario para que aparezca el primer electrón libre en la región de mayor esfuerzo del gap después de la aparición del campo eléctrico provocado por la tensión de impulso. El retraso formativo es el tiempo que toma el proceso de descarga después de la aparición del primer electrón libre.

Una vez que se han establecido las bases físicas del experimento, es conveniente ir más profundo en cuanto al comportamiento del aire en el experimento, para lo que se requiere estudiar con más detalle el comportamiento de los dieléctricos gaseosos. Con este fin el resto del capítulo se enfoca al estudio a nivel microscópico de la naturaleza de los dieléctricos gaseosos y su comportamiento en presencia de campos eléctricos.

2.6 Mecanismos de Polarización y Naturaleza de la Constante Dieléctrica en los Gases. Teoría Microscópica

La relación definida que da D en términos de E y P , es una ecuación a escala macroscópica y que para su mejor interpretación deben analizarse las causas de P , lo que ocurre a escala microscópica, de modo que P es un puente entre las teorías macroscópica y microscópica del comportamiento del dieléctrico.

Para desarrollar la relación que existe entre \mathbf{P} y sus causas resulta útil introducir el concepto de campo local \mathbf{E}_{loc} . El campo local se define como la intensidad de campo eléctrico promedio actuando en una molécula en el dieléctrico. Se puede determinar \mathbf{E}_{loc} removiendo la molécula en cuestión, manteniendo el resto de moléculas en las posiciones promedio que ocupan cuando se presenta la polarización, y luego calculando el campo electrostático promedio en el espacio que ocupaba la molécula que fue removida. Si V_m es el volumen de la cavidad, entonces

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{1}{V_m} \int \bar{\mathbf{e}} dV - \frac{1}{V_m} \int \bar{\mathbf{e}}_m dV \quad (2.19)$$

Donde $\bar{\mathbf{e}}$ es el campo total promedio en un punto en V_m y $\bar{\mathbf{e}}_m$ es el campo promedio en el mismo punto debido a la distribución de cargas de la molécula en cuestión.

Si el material dieléctrico es localmente homogéneo, la primera integral de la ecuación 2.19 es aproximadamente igual al campo macroscópico \mathbf{E} . El campo promedio en V_m es proporcional al momento dipolar de la molécula, el cual a su vez es proporcional a \mathbf{P} , de modo que la segunda integral de la ecuación 2.19 es

$$\frac{1}{V_m} \int \bar{\mathbf{e}}_m dV = -\gamma \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (2.20)$$

En la cual γ se denomina la constante interna de campo, en este caso la ecuación 2.19 asume la forma

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \left(\frac{\gamma}{\epsilon_0} \right) \mathbf{P} \quad (2.21)$$

Con esta formulación se pueden estudiar los tres tipos de polarización que se presentan: la electrónica, iónica y orientacional. También se mostrará que bajo ciertas condiciones existe una relación lineal entre el campo interno y la polarización inducida.

2.6.1 Polarización Electrónica

En la presencia de un campo eléctrico, la nube de electrones y el núcleo de un átomo tienden a desplazarse en direcciones diferentes, causando la polarización electrónica. El desplazamiento producido por un cierto campo local depende de la orientación de la molécula respecto al campo.

Si se asume que se conoce el efecto de los átomos vecinos y la distribución de probabilidad de la orientación de la molécula, se puede deducir un valor promedio de la polarización electrónica (α_e). En [8] se desarrolla un método para deducir una ecuación que describe el comportamiento de la polarización electrónica asumiendo simetría radial en la nube electrónica, esta suposición en general no es cierta si el átomo en cuestión forma parte de un conjunto de átomos en una molécula, sin embargo el valor obtenido constituye una buena aproximación, considerando que es muy complicado obtener expresiones explícitas para la polarización electrónica en situaciones complejas.

2.6.2 Polarización Iónica

Dos ó más átomos pueden unirse para formar una molécula, la unión o el enlace se puede formar de diferentes formas, por ejemplo se puede formar por la transferencia de electrones de un átomo a otro, ó también porque los átomos comparten electrones. Si el enlace entre los átomos se forma por la transferencia de electrones el enlace se conoce como enlace iónico, por otro lado si el enlace se forma porque los átomos comparten electrones el enlace es covalente.

De los enlaces iónicos siempre resultan dipolos eléctricos permanentes en los átomos y aún si el enlace es covalente puede exhibir ciertos dipolos permanentes cuando el "centro de gravedad" de los electrones compartidos no coincide con el "centro de gravedad" de las cargas restantes en los átomos.

Las moléculas se clasifican en moléculas polares si poseen dipolos permanentes o no polares si no lo hacen. Las moléculas polares experimentan una tendencia a alinearse a un campo eléctrico aplicado, esta polarización orientacional será tratada más adelante en el siguiente punto, las moléculas no polares no experimentan esta polarización.

Sin embargo las moléculas no polares presentan otro tipo de polarización que puede ser explicada con la ayuda de la figura 2.8. En la figura 2.8 a se muestra una molécula con dos átomos tipo Y y un átomo tipo X, es decir una molécula XY_2 con enlaces iónicos, en condiciones normales los momentos dipolares que exhibe la molécula por los enlaces iónicos se cancelan mutuamente por estar alineados. Sin embargo cuando se somete a un campo eléctrico en la dirección del eje molecular (figura 2.8 b) el campo interno provoca un desplazamiento de las cargas y los dipolos ya no se cancelan mutuamente, en este caso la polarización es proporcional a la intensidad del campo. Por otro lado si el campo aplicado forma un ángulo θ con el eje molecular como en la figura 2.8 c la polarización es proporcional al producto de la intensidad del campo y el coseno del ángulo θ . Este efecto se conoce como polarización iónica.

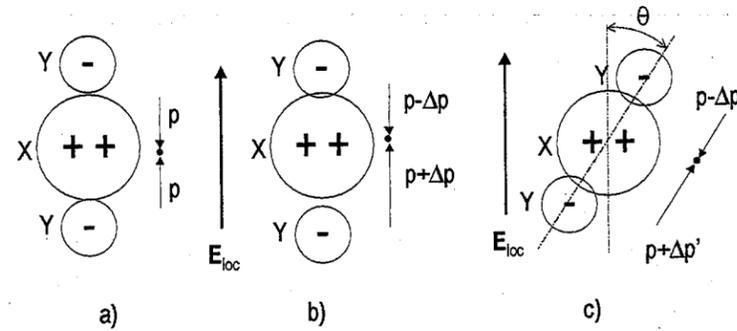


Figura 2.8. Polarización iónica de una molécula no polar, la molécula se constituye de dos átomos tipo Y y un átomo tipo X a través de un enlace iónico, a) la molécula en condiciones normales, sin campo externo, b) con un campo eléctrico externo en dirección del eje molecular, c) la dirección del campo eléctrico externo hace un ángulo θ con el eje molecular.

2.6.3 Polarización Orientacional

Si se considera un material polar homogéneo, todas las moléculas tienen los mismos momentos dipolares permanentes y en ausencia de un campo eléctrico externo, los momentos dipolares están orientados aleatoriamente. Cuando se aplica un campo electrostático las moléculas experimentan un torque que tiende a alinear sus momentos dipolares con el campo. De hecho, si no fuera por los choques producidos por la agitación térmica, todas las moléculas se alinearían con el campo. Sin embargo los choques rompen este patrón y el material experimenta una alineación parcial de sus moléculas. A esto se conoce como polarización orientacional.

La polarización orientacional por molécula es inversamente proporcional a la temperatura, proporcional al cuadrado del momento dipolar permanente por molécula y linealmente proporcional al campo interno, es decir

$$p_o = \alpha_o E_{loc} \quad (2.22)$$

$$\alpha_o = \frac{\mu^2}{3kT} \quad (2.23)$$

Donde α_o es la polarización orientacional, μ es el momento dipolar permanente por molécula, T es la temperatura y k es la constante de Boltzman que indica la cantidad de energía que es inyectada a la molécula unidad de temperatura y si T esta en kelvins entonces $k = 1.38 \times 10^{-23}$ joules/grado.

2.6.4 Susceptibilidad y Permitividad. Punto de Vista de la Teoría Microscópica

Aquellos materiales cuyas moléculas poseen momentos dipolares permanentes que en ausencia de un campo eléctrico externo están orientados aleatoriamente, pueden exhibir los tres tipos de polarización, electrónica, iónica y orientacional cuando se les aplica un campo eléctrico. La polarización promedio por molécula es en esos casos

$$p = \alpha E_{loc} \quad (2.24)$$

Donde

$$p = p_e + p_i + p_o \quad (2.25)$$

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_o \quad (2.26)$$

Si N es el número de moléculas por metro cúbico, el vector de polarización puede definirse también como:

$$P = Np = N\alpha E_{loc} \quad (2.27)$$

Haciendo uso de la ecuación 2.21 y de la ecuación 2.27 se puede escribir

$$P = \frac{N\alpha}{1 - \frac{\gamma}{\epsilon_0} N\alpha} E \quad (2.28)$$

Al comparar la ecuación 2.28 con la ecuación 2.13 se puede obtener una expresión para la susceptibilidad

$$\chi_e = \frac{N \frac{\alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{\gamma}{\epsilon_0} N\alpha} \quad (2.29)$$

2.6.5 Constante Dieléctrica de los Gases. Punto de Vista de la Teoría Microscópica

Para la mayoría de los gases, bajo condiciones normales de presión y temperatura, el término $N \frac{\alpha}{\epsilon_0} \ll 1$, esto se debe a la baja densidad de partículas, de modo que con esta condición es posible simplificar el análisis para la susceptibilidad y entonces queda

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{\epsilon_0} \ll 1 \quad (2.30)$$

De modo que la constante dieléctrica es cercana a la unidad, el campo local o interno está dado entonces por

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \mathbf{P} = \mathbf{E}(1 + \gamma\chi_e) \approx \mathbf{E} \quad (2.31)$$

Este resultado se debe a que las moléculas están muy lejos una de otra, de modo que el vector \mathbf{P} es muy débil, y las moléculas vecinas no ejercen un efecto suficiente para causar que el campo local difiera substancialmente del campo macroscópico.

Estas simplificaciones se aplican de manera diferente en tres casos especiales, para los gases monoatómicos, para los gases no polares y para los gases polares.

2.6.5.1 Gases Monoatómicos

Los gases raros son monoatómicos bajo circunstancias normales, de modo que solo se presenta un mecanismo de polarización, el electrónico, de modo que

$$\alpha = \alpha_e \quad (2.32)$$

2.6.5.2 Gases No Polares

En los gases no polares se presentan tanto la polarización electrónica como la polarización iónica, de modo que la polarización total es la suma de ambas

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i \quad (2.33)$$

2.6.5.3 Gases Polares

Para un gas compuesto de moléculas poliatómicas que poseen momentos dipolares permanentes, se presentan los tres tipos de polarización, de modo que

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_o = \alpha_e + \alpha_i + \frac{\mu^2}{3kT} \quad (2.34)$$

Así que la susceptibilidad eléctrica es dependiente de la temperatura de acuerdo a

$$\chi_e = \frac{N}{\epsilon_0} \left(\alpha_e + \alpha_i + \frac{\mu^2}{3kT} \right) \quad (2.35)$$

Si se construye una gráfica de susceptibilidad eléctrica contra el inverso de la temperatura se obtiene una línea recta para todos los gases (figura 2.9). Construyendo esta gráfica es posible separar la contribución de la polarización orientacional respecto a la suma de la polarización electrónica e iónica en la polarización total.

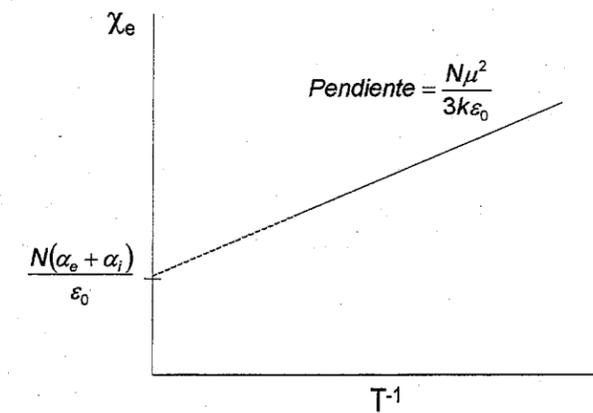


Figura 2.9. Susceptibilidad eléctrica contra el inverso de la temperatura para un gas polar.

Capítulo 3. Métodos de Solución al Modelo del Campo Electrostático

3.1 Las Ecuaciones Diferenciales Parciales en Electrostática

Como se vio en el Capítulo 2, el modelo matemático del campo electrostático es la ecuación de Poisson, la ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial. Las ecuaciones diferenciales parciales desempeñan un papel importante en muchas áreas de la física e ingeniería. La ecuación de Poisson aparece en el análisis de una gran variedad de problemas, en la teoría de los campos: eléctrico y magnético, en la teoría del calor, en problemas de vibraciones mecánicas, así como también en la teoría de difusión de fluidos, entre otros.

Entonces, debido a la amplia gama de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales, los métodos de solución de ecuaciones diferenciales parciales resultan de suma importancia en el análisis de los fenómenos físicos.

Las ecuaciones diferenciales parciales son clasificadas la mayoría de las veces en tres categorías: parabólicas, elípticas o hiperbólicas, basándose en el modelo de propagación que describen. Un ejemplo de una ecuación hiperbólica es la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

donde v es la velocidad de propagación de onda. Un ejemplo de una ecuación parabólica es la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

y, por último un ejemplo de una ecuación elíptica es la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y) \quad (3.3)$$

cuando el término de la fuente ρ es cero, la ecuación de Poisson se conoce como ecuación de Laplace.

En el caso del problema de campo eléctrico, ya se mencionó que la ecuación diferencial parcial que gobierna el fenómeno es justamente la Ecuación de Poisson (Ecuación 2.18), en cierto dominio físico, con ciertas condiciones de frontera conocidas en ciertos puntos, estas condiciones de frontera pueden ser de potencial o de flujo. Entonces, el problema radica en encontrar una función que sea solución a la ecuación de Poisson y sea consistente con las condiciones de frontera dadas.

3.2 Métodos Analíticos para la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una solución analítica a una ecuación diferencial parcial se puede encontrar en general por métodos tradicionales y por métodos especiales, dependiendo del contexto del problema. Sin embargo, resulta sumamente complicado obtener soluciones generales como las que se obtienen en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias [9].

Un método que se utiliza comúnmente para la solución de algunas ecuaciones diferenciales parciales en dominios muy sencillos es el método de separación de variables, que cambia la ecuación diferencial parcial en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, para la mayoría de los casos la técnica de separación de variables se utiliza en la obtención de soluciones a problemas específicos, lo que se conoce como métodos especiales.

Los métodos especiales de solución a las ecuaciones diferenciales parciales dependen totalmente del dominio del problema [10]. Por ejemplo, cuando se modelan fenómenos que poseen simetría

circular, surge una ecuación diferencial en derivadas parciales con coeficientes variables, que se conoce como Ecuación de Bessel, para este caso se puede obtener una solución analítica, que generalmente se conoce como solución en Ecuaciones de Bessel. Por otro lado, en aplicaciones de mecánica cuántica aparecen ecuaciones diferenciales parciales que involucran las posiciones y velocidades de partículas elementales, dichas ecuaciones se pueden resolver de manera analítica tomando como funciones solución base las funciones de Hermite y sus Polinomios. En aplicaciones de teoría electromagnética, algunas ecuaciones diferenciales parciales que surgen del análisis, pueden resolverse por medio de Polinomios de Legendre.

Sin embargo, cabe hacer la aclaración que los métodos analíticos especiales para la solución de ecuaciones diferenciales parciales son aplicables a pocos casos de la vida real, debido a que la geometría de los dominios en los fenómenos reales resulta demasiado compleja de modelar usando un método analítico. Debido a este hecho existe cierta variedad de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, y a diferencia de los métodos analíticos obtienen soluciones a problemas generales.

3.3 Métodos Numéricos para la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las técnicas numéricas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales son un tema muy amplio, debido a la gran complejidad que implica encontrar soluciones analíticas, se ha invertido mucho trabajo en los métodos numéricos, y como resultado existe cierta variedad de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, una vez más, la elección del método de solución adecuado depende del tipo de problema a resolver.

Algunos métodos que existen para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales son:

- Métodos Monte Carlo
- Métodos Variacionales
- Métodos Espectrales
- Método de Diferencias Finitas (DFM)
- Método del Elemento Finito (FEM)
- Método del Elemento en la Frontera (BEM)

De entre estos métodos, los últimos dos son los preferidos para analizar y resolver problemas en las diferentes ramas de la ingeniería y la física aplicada, debido a que ofrecen gran libertad para colocar elementos de discretización del dominio donde se requieran, y así se puede trabajar con geometrías complejas e irregulares.

En este trabajo se utilizó el Método del Elemento Finito y el Método del Elemento en la Frontera para la solución de la ecuación de Poisson, en el problema electrostático descrito en el capítulo dos.

3.4 Método del Elemento Finito

3.4.1 Generalidades

El elemento finito es un método de cálculo numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales en un cierto dominio, bajo ciertas condiciones de frontera [11]. Debido a que una gran gama de fenómenos de ingeniería tienen su fundamento en ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera, el método del elemento finito ha llegado a ser una herramienta poderosa en la solución numérica de un amplio rango de problemas de ingeniería. Las aplicaciones que se le han dado van desde el análisis por deformación y esfuerzo de automóviles, aeronaves, edificios y estructuras de puentes, hasta el análisis de los campos de flujo de calor, fluidos, eléctricos, magnéticos, filtraciones, y otros problemas de flujo. El método del elemento finito constituye hoy en día una de las herramientas más poderosas de que se dispone al modelar y simular situaciones de trabajo que una pieza debe soportar, antes de crear prototipos.

Las ideas básicas del método del elemento finito se originaron en el ámbito de la industria aeroespacial. En 1941, Henrikoff presentó una solución de problemas de la elasticidad usando el "método de trabajo del marco". En un artículo publicado en 1943, Courant usó interpolación polinomial por partes sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión. Turner y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos y presentaron sus hallazgos en 1956. Clough fue el primero en acuñar y emplear el término Elemento Finito en 1960. Sin embargo hasta la década de 1970 se fijaron las bases matemáticas y se realizaron estudios de convergencia.

Las primeras aplicaciones del método del elemento finito a problemas electromagnéticos datan de 1968, sin embargo su aplicación siempre ha sido menor en comparación con las aplicaciones en

otras áreas de la ingeniería como la mecánica y la ingeniería civil [12]. Por esta razón existen pocos trabajos relacionados con el área, específicamente en México existe un vacío entre los especialistas en Elemento Finito y los ingenieros electricistas, este vacío se percibe sobretodo en las empresas que comercializan programas de computadora para la solución de problemas con el método del elemento finito para electromagnetismo.

3.4.2 Formulación del Problema de Campo Eléctrico para la Solución con el Método del Elemento Finito

3.4.2.1 Descripción General del Método del Elemento Finito

Como se mencionó en el capítulo 2, el problema en general es conocer la distribución de campo eléctrico que establece el potencial eléctrico en un electrodo en ciertas condiciones experimentales. También se mencionó que el campo eléctrico puede ser encontrado mediante una operación de gradiente, cuando se conoce la distribución de potencial eléctrico. Esta distribución de potencial es un campo escalar y esta gobernado por la ecuación de Poisson (ecuación 2.18), que es conveniente repetir aquí:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v \quad (3.4)$$

Considerando el caso más general de la ecuación 2.18

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) + V = -\rho_v \quad (3.5)$$

La ecuación 3.4 describe un fenómeno continuo que ocurre en un cierto dominio Ω , el método del elemento finito se basa justamente en que cualquier cantidad continua puede ser aproximada por un modelo discreto compuesto de un conjunto de funciones, definidas sobre un número finito de subdominios Ω_i .

Entonces desde el punto de vista del método del elemento finito, el dominio de la ecuación 3.4 se considera un ensamble de partículas pequeñas de tamaño finito llamadas elementos finitos. Los elementos finitos se unen en puntos que se conocen como nodos y toda la estructura que modela el dominio se conoce como malla de elementos finitos [12].

La base matemática del método del elemento finito es el método de residuos ponderados para aproximar la solución a un problema de valor inicial (PVI) descrito mediante ecuaciones

diferenciales parciales [13]. El método de residuos ponderados busca una aproximación a la solución de la ecuación diferencial, mediante funciones de aproximación y minimizando el residuo.

La conexión entre estos dos puntos fundamentales del método del elemento finito radica en que justamente las funciones de forma que definen los elementos finitos se utilizan para aproximar la ecuación diferencial en los subdominios definidos por la malla de elementos finitos (formulación isoparamétrica).

3.4.2.2 Método de los Residuos Ponderados

La ecuación 3.4 se puede poner en la forma general:

$$Lu = f \quad (3.6)$$

Con L un operador sobre la función u y f una constante, entonces si \tilde{u} es una aproximación a u, el residuo queda definido:

$$r(\tilde{u}) = -(L\tilde{u} + f) \quad (3.7)$$

Para encontrar una buena aproximación a u, se pueden elegir funciones base N_1, N_2, \dots, N_n de modo que:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n c_i N_i \quad (3.8)$$

Donde las c_i son un conjunto de constantes que se eligen para que minimicen el residuo en algún sentido [14]. Existen varios métodos para minimizar el residuo, entre los cuales se pueden mencionar

- Método de colocación
- Mínimos cuadrados
- Galerkin

En el método de colocación las l_j se encuentran de tal manera que el residuo sea cero en n puntos en el dominio x_1, x_2, \dots, x_n , que se denominan puntos de colocación. Obviamente un problema fuerte de este método es la búsqueda de los puntos de colocación.

Las c_i también se pueden elegir de tal manera que minimicen el residuo en el sentido de mínimos cuadrados, de tal manera que:

$$I(\tilde{u}) = \int r(\tilde{u})^2 \quad (3.9)$$

sea mínimo, $I(\tilde{u})$ es función únicamente de las c_i , se debe hacer:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

y de acuerdo a la ecuación 3.6, el residuo queda

$$I(c_1, \dots, c_n) = \int \left[L \left(\sum_i c_i N_i \right) - f \right]^2 \quad (3.11)$$

la ecuación 3.10 y la ecuación 3.11 constituyen un sistema de ecuaciones que se resuelven para encontrar las c_i . Este sistema se puede resolver de manera más o menos sencilla si L es lineal.

Con el método de Galerkin la integral del residuo se pondera con funciones base:

$$\int r(\tilde{u}) \omega_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

es decir:

$$\int (L(\tilde{u}) - f) \omega_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

y

$$\int \left[L \left(\sum_i c_i N_i \right) - f \right] \omega_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

3.4.2.3 Formulación de Elemento Finito

Para la aplicación del método de los residuos ponderados en la solución de la ecuación 3.5, se requiere de la minimización del residuo por el método de Galerkin, al aproximar el potencial con una función ϕ escribiendo en coordenadas cartesianas se tiene:

$$\int_{\Omega} \epsilon_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \omega d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \omega d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \omega d\Omega + \int_{\Omega} \phi \omega d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v \omega d\Omega + C.C. \quad (3.15)$$

donde C.C. son las condiciones de frontera para el problema en particular, en el caso concreto del problema de campo eléctrico en el electrodo de la figura 2.4, las condiciones de frontera conocidas son el potencial en la superficie del electrodo superior y en el plano de referencia (condiciones de tipo Dirichlet) y la derivada normal del potencial en la superficie del electrodo flotado (condición Neumann) [13].

Integrando por partes los términos de las segundas derivadas y agrupando:

$$\epsilon_x \omega \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{\Omega} + \epsilon_y \omega \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{\Omega} + \epsilon_z \omega \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{\Omega} - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \epsilon_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \epsilon_y + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \epsilon_z \right) d\Omega + \int_{\Omega} \phi \omega d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v \omega d\Omega + C.C. \quad (3.16)$$

Los primeros tres términos de la ecuación 3.16 se pueden considerar condiciones de frontera, de modo que las trataremos de manera genérica en el término C.C., quedando:

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \epsilon_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \epsilon_y + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \epsilon_z \right) d\Omega + \int_{\Omega} \phi \omega d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v \omega d\Omega + C.C. \quad (3.17)$$

Como se mencionó, en el Método del Elemento Finito la función de ponderación ω se escoge igual a la función de aproximación de manera local en el subdominio, de manera que:

$$\omega = N_i \quad (3.18)$$

$$\phi = \sum_i N_i \phi_i \quad (3.19)$$

Quedando:

$$- \int_{\Omega} \left(\epsilon_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} + \epsilon_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \phi_j d\Omega + \int_{\Omega} N_i \sum_j N_j \phi_j d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v N_i d\Omega + C.C. \quad (3.20)$$

que se puede escribir también:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} N_i \sum_j N_j \phi_j d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v N_i d\Omega + C.C. \quad (3.21)$$

si se define:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

el renglón i de la matriz \mathbf{B} queda:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

La ecuación 3.21 se puede escribir:

$$-\int_{\Omega} (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} \phi) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{N} \phi d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v \mathbf{N} d\Omega + C.C. \quad (3.25)$$

de modo que:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} - \mathbf{N}^t \mathbf{N}) \phi d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v \mathbf{N} d\Omega + C.C. \quad (3.26)$$

que es de la forma:

$$\mathbf{K} \phi = \mathbf{f} \quad (3.27)$$

Con:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i^t \mathbf{D} \mathbf{B}_j - \mathbf{N}_i^t \mathbf{N}_j) d\Omega \quad (3.28)$$

y

$$f_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \rho_v \quad (3.29)$$

Resolviendo el sistema descrito por la ecuación 3.27 se encuentra una aproximación para la función de potencial. A la matriz \mathbf{K} generalmente se le conoce como matriz de rigidez del análisis por el Método del Elemento Finito.

3.4.2.4 Preproceso

A la primera etapa del análisis por el Método del Elemento Finito se le llama preproceso y consiste básicamente en la discretización del dominio en nodos y elementos, a lo que comúnmente se denomina construir la malla de elementos finitos. El problema de generación de mallas depende de la geometría del dominio que se quiere representar, y cuando se pretende realizar de manera automática, se convierte en un problema difícil de resolver.

Existen varias técnicas y métodos para la construcción de mallas, sin embargo la descripción de estas técnicas salen del alcance en este trabajo, en el análisis de elemento finito que se realizó, se utilizó la herramienta de generación automática de mallas MeshTool construida dentro del programa de análisis por elemento finito ANSYS. Sin embargo, aún cuando se utilizó esta

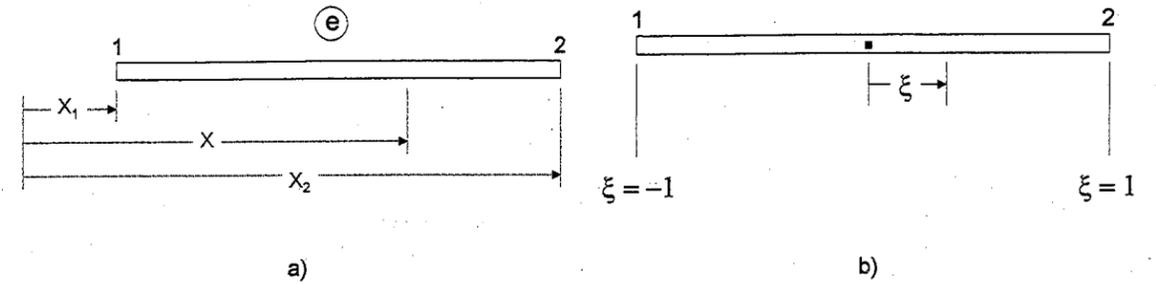


Figura 3.1. a) Barra Unidimensional en coordenadas x, b) coordenadas intrínsecas ξ .

herramienta aún queda el problema de decidir la forma y tamaño de los elementos, por esa razón es conveniente describir los elementos más usuales en el análisis por elementos finitos.

Para describir correctamente el papel que juegan los elementos en el Método del Elemento Finito es importante no perder de vista que dichos elementos constituyen una manera de modelar o interpolar el dominio. La función de interpolación de los elementos para describir el dominio puede ser de cualquier orden, sin embargo, mientras más alto el orden se obtiene una mejor aproximación, pero una mayor complejidad de cálculo. Para ilustrar este hecho es conveniente revisar la interpolación en una dimensión para luego describir los elementos en dos y tres dimensiones.

En la figura 3.1 (a), se muestra una barra unidimensional en un análisis por elemento finito bajo la acción de una función de potencial U , en la figura 3.1 (b) se define un punto de referencia normalizado, dando origen a un sistema coordenado natural o intrínseco a la barra definido por:

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1} (x - x_1) - 1 \quad (3.30)$$

de ahí se observa que $\xi = -1$ en el extremo izquierdo (nodo 1) y $\xi = 1$ en el extremo derecho (nodo 2).

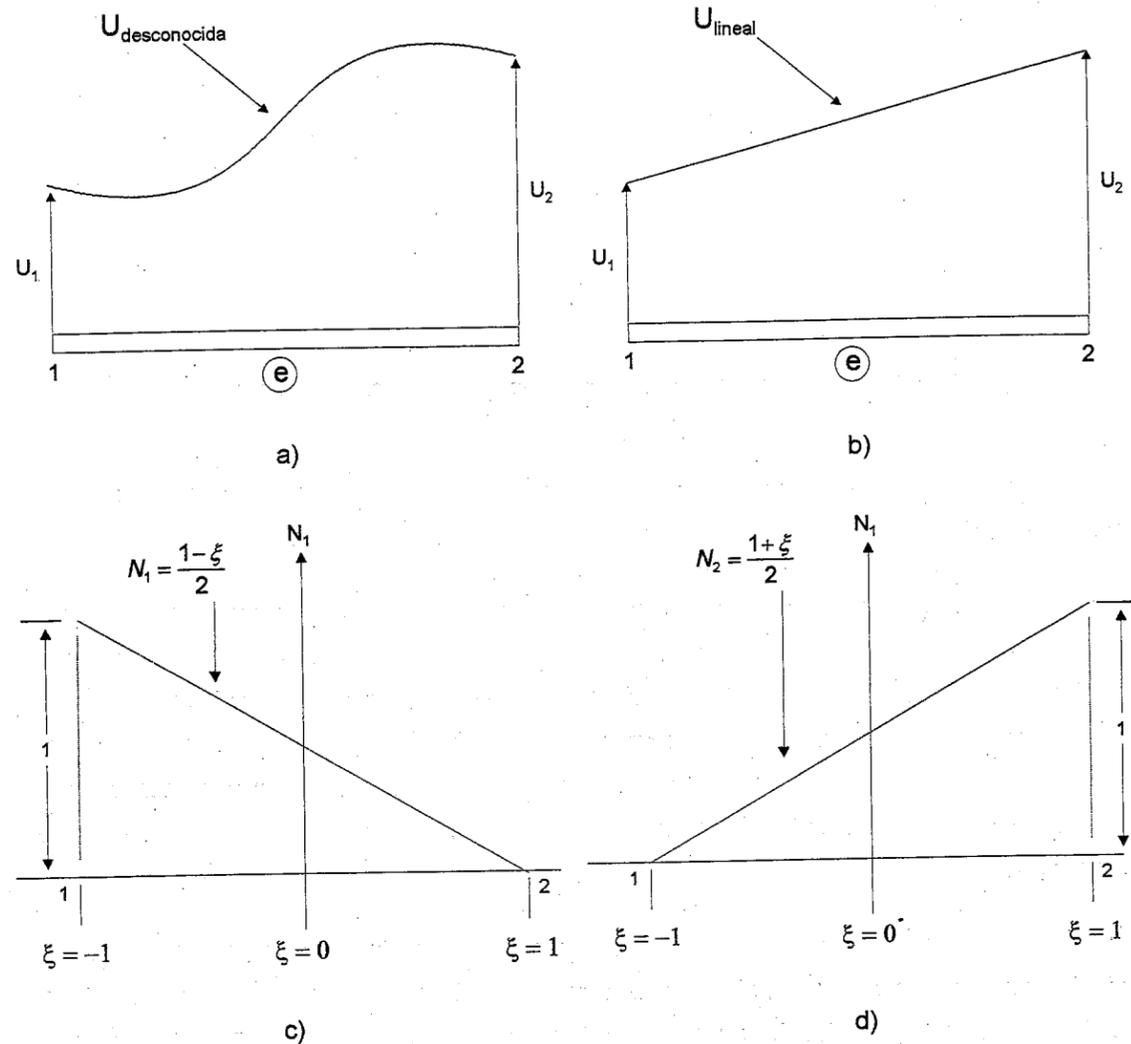


Figura 3.2 Interpolación lineal de la función de potencial U. a) Función de potencial; b) Interpolación lineal de la función de potencial; c) Función de forma N_1 ; d) Función de forma N_2 .

Usando este sistema de coordenadas se pueden describir funciones de forma para interpolar el dominio de la función de potencial que se muestra en la figura 3.2 (a), sobre la barra. Esta interpolación puede realizarse por ejemplo con una función lineal como muestra la figura 3.2 (b). Para implementar esta interpolación lineal se introducen funciones de forma lineales tal como se muestra en las figuras 3.2 (c) y 3.2 (d), como:

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad (3.31)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.32)$$

o bien:

$$N_i(\xi) = \frac{1+\xi_i\xi}{2} \quad (3.33)$$

de modo que u puede ser expresada en términos de la modelación de la siguiente forma:

$$u = N_1q_1 + N_2q_2 \quad (3.34)$$

Si se utiliza una función de segundo orden para realizar la interpolación como muestra la figura 3.3(a), entonces las funciones de forma quedan definidas en coordenadas naturales de acuerdo a las figuras 3.3(b), 3.3(c) y 3.3(d) como:

$$N_1(\xi) = \frac{-\xi(1-\xi)}{2} \quad (3.35)$$

$$N_2(\xi) = \frac{\xi(1+\xi)}{2} \quad (3.36)$$

$$N_3(\xi) = 1-\xi^2 \quad (3.37)$$

o bien:

$$N_i(\xi) = \frac{1+\xi_i\xi}{2} \quad (3.38)$$

quedando u:

$$u = N_1q_1 + N_2q_2 + N_3q_3 \quad (3.39)$$

De igual manera se puede seguir aumentando el orden de la interpolación definiendo funciones de forma cada vez más complejas

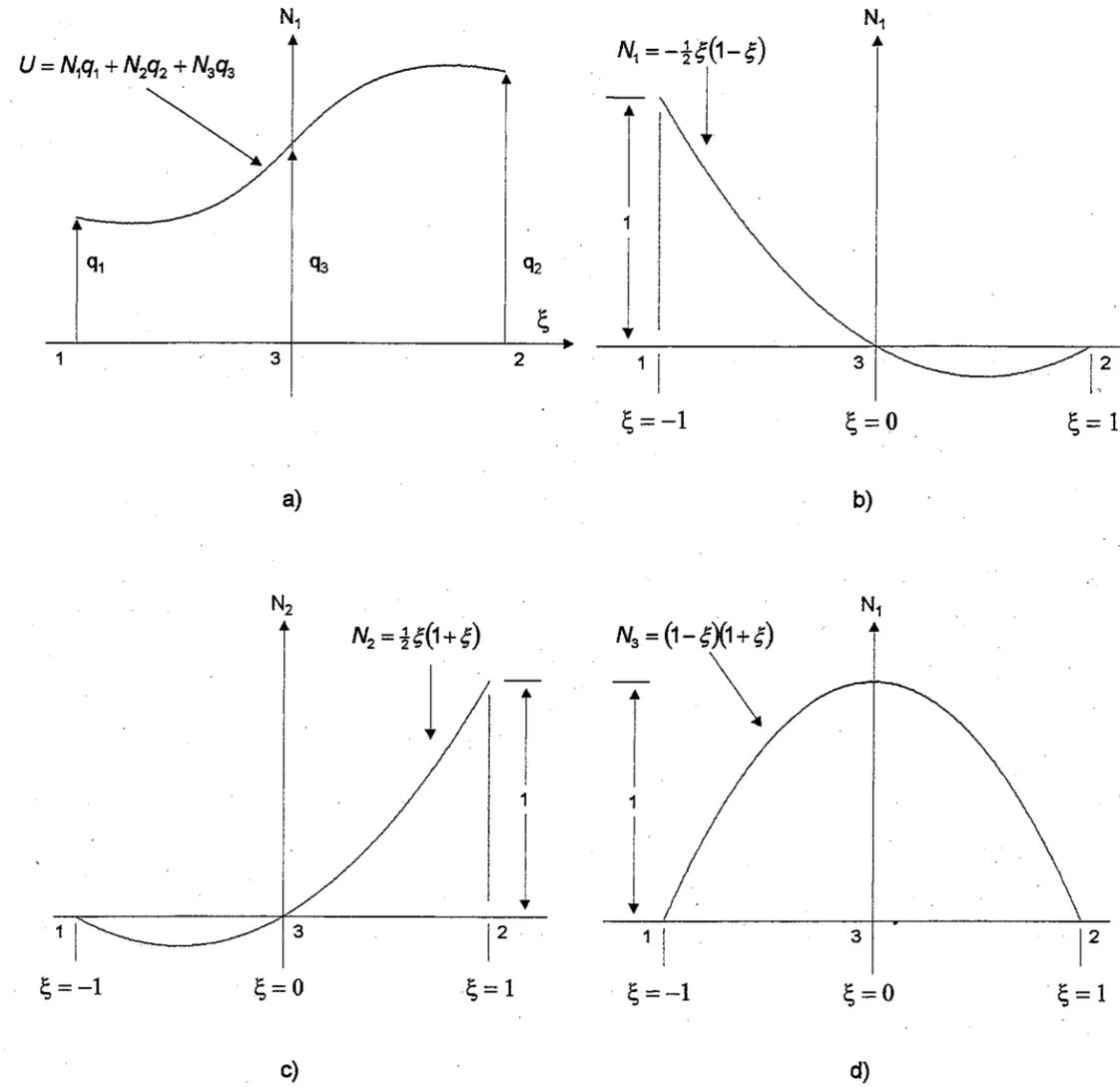


Figura 3.3 a) Interpolación cuadrática de la función de potencial U; b) Función de forma N_1 ; c) Función de forma N_2 ; d) Función de forma N_3 .

Utilizando la interpolación en una dimensión es posible definir elementos de dos y tres dimensiones, al interpolar en cada dimensión. Por ejemplo si se utiliza la interpolación lineal en un elemento de dos dimensiones se obtiene un cuadrilátero de 4 nodos, sin embargo si la interpolación es cuadrática, entonces se obtiene un cuadrilátero de 9 nodos. En la figura 3.4 se muestran elementos de dos y tres dimensiones.

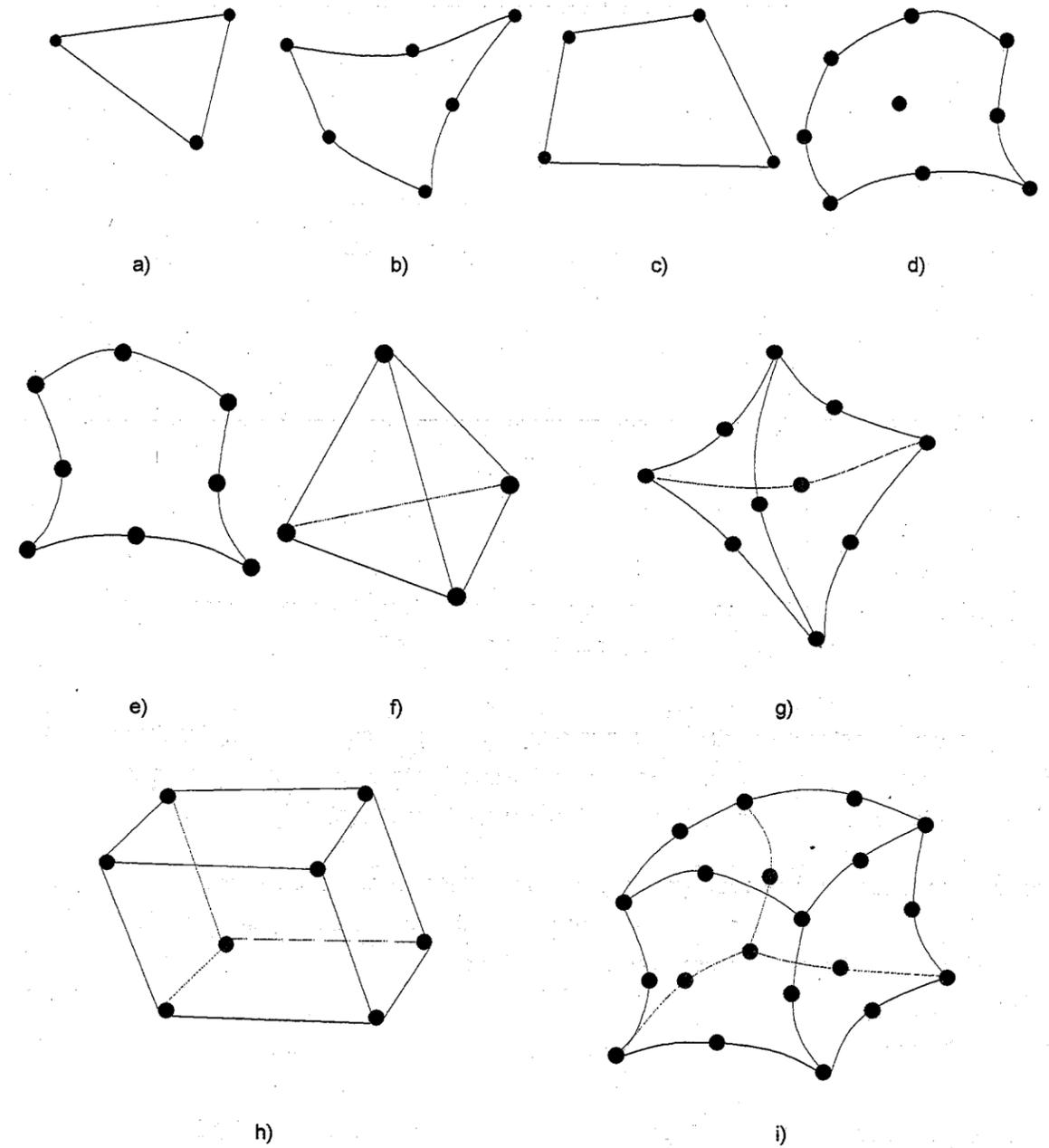


Figura 3.4. Diferentes elementos para la construcción de mallas. Elementos en 2D: a) Triángulo lineal de 3 nodos; b) Triángulo cuadrático de 6 nodos; c) Cuadrilátero lineal de 4 nodos; d) Cuadrilátero cuadrático de 9 nodos; e) Cuadrilátero Serendípito de 8 nodos; Elementos en 3D: f) Tetraedro lineal de 4 nodos; g) Tetraedro cuadrático de 10 nodos; h) Cubo lineal de 8 nodos; i) Cubo cuadrático de 20 nodos.

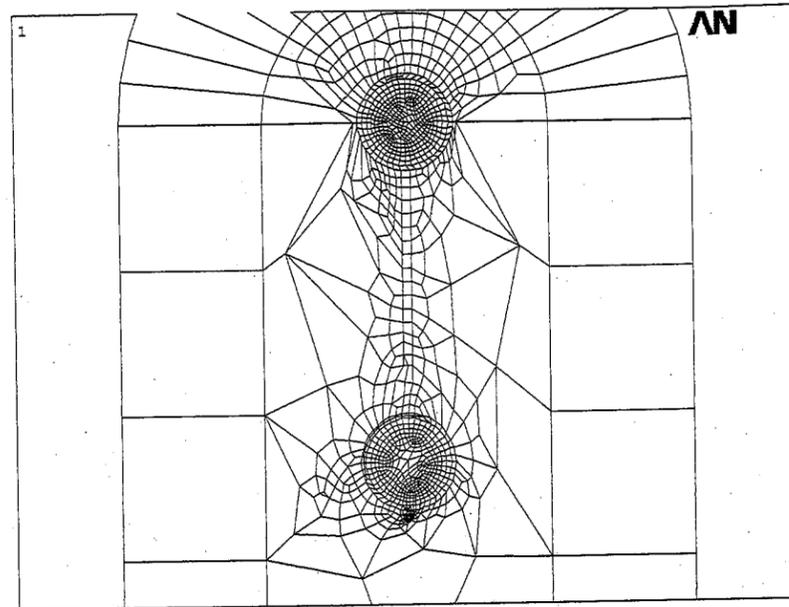


Figura 3.5. Discretización de la geometría para simulación de trabajo en línea viva en líneas de alta tensión para el análisis por el Método del Elemento Finito

Haciendo uso de estos elementos y algunos otros es posible discretizar cualquier dominio para realizar el análisis de elemento finito. En la figura 3.5 se muestra la discretización realizada para la solución de la ecuación 2.18 en el dominio definido por la figura 2.4 (a).

Como ya se mencionó, el resultado del preproceso en el análisis por el Método del Elemento Finito es una lista de nodos con sus respectivas coordenadas de acuerdo al dominio del problema, y otra lista de conectividades entre los nodos para formar elementos.

3.4.2.5 Proceso

A las acciones necesarias para obtener una solución numérica de la ecuación 2.18 de acuerdo a la discretización, se denomina proceso de elemento finito. El proceso consiste en los siguientes puntos:

- Cálculo de la matriz de rigidez total (K)
- Cálculo del vector de cargas (f)
- Solución al sistema de ecuaciones global

El cálculo de la matriz de rigidez se hace utilizando la ecuación 3.28, para cada elemento en la malla, donde los subíndices indican el número de cada nodo en el elemento, de acuerdo a la lista de nodos y conectividades. Por otro lado para calcular el vector de cargas se utiliza la ecuación 3.29. La integración que indican las ecuaciones 3.28, y 3.29, se realiza numéricamente. Una vez que se ha calculado la matriz de rigidez y el vector de cargas de todos los elementos, se superponen los valores de cada elemento de acuerdo al valor nodal en una matriz de rigidez y un vector de cargas globales para toda la discretización del dominio.

Las condiciones de frontera se aplican directamente sobre la matriz de rigidez global en las posiciones de los nodos que correspondan de acuerdo a la geometría del dominio.

Una vez que se han realizado las acciones anteriores se resuelve la ecuación 3.27, para los valores del potencial ϕ en los nodos.

3.4.2.6 Postproceso

El postproceso de elemento finito consiste en mostrar el resultado del análisis de manera que sea fácil la interpretación física del fenómeno que se está analizando. Una técnica utilizada por la mayoría de los programas de Elemento Finito es asignar un color (azul) para el valor mínimo del potencial en el dominio y otro color (rojo) para el valor máximo, una vez hecho esto, se asignan los valores de potencial intermedios a colores intermedios haciendo uso de las mismas funciones de interpolación, el resultado es un mapa de color continuo sobre el dominio donde es fácil reconocer el valor aproximado de potencial en una cierta zona, observando la escala correspondiente.

Otra manera común de mostrar los resultados del análisis por el Método del Elemento Finito es una gráfica de contorno, donde se discretiza el valor del potencial obtenido en un número arbitrario de capas, y cada una de estas capas se grafica como un contorno sobre el dominio con un color correspondiente al valor discreto del potencial en ese punto, esta gráfica se puede obtener en tercera dimensión para visualizar una sábana de contornos donde tanto el color de la línea como la altura, de una cierta región tienen que ver con su valor de potencial.

Como ya se mencionó, también puede presentarse como un resultado de análisis por el Método del Elemento Finito, en el caso concreto de solución de la ecuación de Poisson para campo eléctrico, el gradiente del potencial obtenido que de acuerdo a la ecuación 2.5, es justamente el campo eléctrico. Cuando se presenta la solución de esta forma es posible utilizar las técnicas de visualización antes descritas, y también es posible a cada punto del dominio asignarle una flecha que representa el campo eléctrico en ese punto, de acuerdo a la representación normal de vectores con flechas.

3.5 Método del Elemento en la Frontera

Una vez que se han desarrollado las ideas básicas acerca del Método del Elemento Finito, se pueden tomar de base y desarrollar las ideas fundamentales acerca del Método del Elemento en la Frontera. Hay ciertas diferencias importantes entre estos dos métodos, quizá la más significativa reside en la elección de la función de peso en el método de los residuos ponderados para aproximar la función de potencial [15].

3.5.1 Elección de la Función de Peso

En el caso del Método del Elemento en la Frontera la elección de la función de peso recae en una solución fundamental de la ecuación diferencial parcial, la solución fundamental de una ecuación diferencial parcial juega el mismo papel que la solución particular de una ecuación diferencial ordinaria. La mayoría de las ecuaciones diferenciales parciales comunes tienen soluciones fundamentales conocidas, por ejemplo para la ecuación de Laplace, que como ya se mencionó es el caso particular de la ecuación de Poisson cuando el término fuente es cero, una solución fundamental es:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \log(r) \quad (3.40)$$

con r :

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \quad (3.41)$$

La función de peso así definida es singular en el punto (ξ, η) . Esta solución fue obtenida para un pequeño círculo de radio mayor a cero, centrado en (ξ, η) dentro del dominio Ω , de la ecuación diferencial parcial original, considerando que la ecuación 3.40, es también solución a la siguiente ecuación diferencial parcial sin referencia a las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \delta(\xi - x, \eta - y) = 0 \quad (3.42)$$

con $\delta(\xi - x, \eta - y)$ la función delta de Dirac en el punto (ξ, η) .

3.5.2 Formulación del Método del Elemento en la Frontera

Considerando la ecuación de Laplace en un dominio dos dimensional:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad (3.43)$$

Utilizando el método de residuos ponderados se puede formar una ecuación integral, para aproximar la función de potencial con la función ϕ :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi \omega d\Omega = 0 \quad (3.44)$$

haciendo uso del teorema de Green – Gauss:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi \omega d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \omega d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \omega d\Omega = 0 \quad (3.45)$$

con Γ la frontera del dominio de la ecuación 3.43, aplicando nuevamente el teorema de Green – Gauss para la segunda integral:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \omega d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \omega d\Omega = 0 \quad (3.46)$$

Como ya se mencionó la función de peso se elige como la solución fundamental de la ecuación 3.43, es decir la ecuación 3.40.

De la ecuación 3.42:

$$\nabla^2 \omega = -\delta(\xi - x, \eta - y) \quad (3.47)$$

de modo que la última integral de la ecuación 3.46, queda:

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \omega d\Omega = -\int_{\Omega} \phi \delta(\xi - x, \eta - y) d\Omega \quad (3.48)$$

haciendo uso de las propiedades de la Delta de Dirac:

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \omega d\Omega = - \int_{\Omega} \phi \delta(\xi - x, \eta - y) d\Omega = -\phi(\xi, \eta) \quad (\xi, \eta) \in \Omega \quad (3.49)$$

con lo que la ecuación 3.46, queda:

$$\phi(\xi, \eta) + \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \omega d\Gamma \quad (3.50)$$

Esta ecuación contiene únicamente integrales a lo largo de la frontera y no integrales en todo el dominio, por lo que se conoce como ecuación de integración en la frontera. Esta ecuación relaciona el valor de ϕ en algún punto dentro del dominio de la solución a la ecuación integral que contiene a ϕ y $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ sobre la frontera del dominio de la solución.

Por otro lado, si el punto (ξ, η) esta fuera de Ω entonces:

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \omega d\Omega = - \int_{\Omega} \phi \delta(\xi - x, \eta - y) d\Omega = 0 \quad (3.51)$$

ya que el integrando en la segunda integral es cero en cualquier punto excepto en el punto (ξ, η) y este punto esta fuera de la región de integración.

Sin embargo, el caso que requiere un tratamiento especial es cuando el punto (ξ, η) esta en la frontera del dominio Ω . La expresión para este caso es simplemente la misma de la ecuación 3.50, con el término $\phi(\xi, \eta)$ reemplazado por $\frac{1}{2}\phi(\xi, \eta)$. Se puede explicar este hecho, de una manera no rigurosa como sigue: Cuando (ξ, η) esta dentro de Ω , se integra a lo largo de toda la singularidad de la función Delta de Dirac para obtener $\phi(\xi, \eta)$ en la ecuación 3.50. Sin embargo cuando (ξ, η) esta en la frontera de Ω , solo se tiene que integrar a lo largo de la "mitad" de la singularidad de la Delta de Dirac para obtener $\frac{1}{2}\phi(\xi, \eta)$. Un desarrollo más riguroso de este hecho puede encontrarse en [15].

Combinando los casos en los que el punto (ξ, η) este dentro, fuera y en la frontera de Ω , obtenemos:

$$\frac{1}{2}\phi(P) + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \omega d\Gamma \quad (3.52)$$

donde $P = (\xi, \eta) \in \Omega$

Aún se debe hacer una última consideración, si P esta en la frontera y se trata de un punto no suave, (una esquina), entonces el coeficiente $\frac{1}{2}$ es reemplazado por $\frac{\alpha}{2\pi}$ donde α es el ángulo interno en P .

De modo que queda la ecuación integral en la frontera:

$$c(P)\phi(P) + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \omega d\Gamma \quad (3.53)$$

donde:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \log(r)$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

$$c(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{si } P \in \Gamma \text{ y } \Gamma \text{ es suave en } P \\ \frac{\text{ángulo sólido interno}}{2\pi} & \text{si } P \in \Gamma \text{ y } \Gamma \text{ no es suave en } P \end{cases}$$

La ecuación 3.53, involucra solo las distribuciones superficiales de ϕ y $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ y el valor de ϕ en P , de modo que usando esta ecuación se pueden encontrar las distribuciones superficiales de ϕ y $\frac{\partial \phi}{\partial n}$, y luego usar esta misma ecuación para encontrar cualquier punto en Ω .

De manera análoga al Método del Elemento Finito, la solución al Método del Elemento en la Frontera consta de tres partes, preproceso, proceso y postproceso.

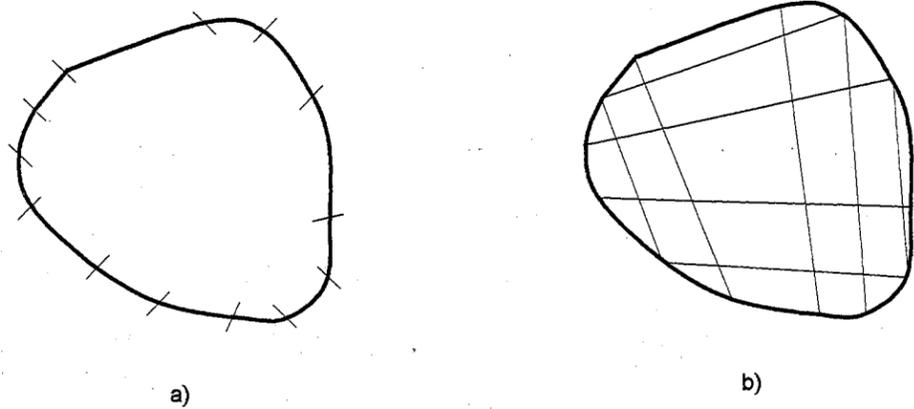


Figura 3.6. a) Representación esquemática de una malla para análisis por el Método del Elemento en la Frontera; b) Malla para análisis por el Método del Elemento Finito en el mismo dominio

3.5.2.1 Preproceso

De manera similar al Método del Elemento Finito, el primer paso en el análisis por el Método del Elemento en la Frontera es la discretización del dominio. El proceso es básicamente el mismo y se pueden usar las mismas funciones de forma definidas para los elementos que se usan en el análisis por Elemento Finito. La diferencia en la discretización entre Elemento Finito y Elemento en la Frontera es que para análisis en dos dimensiones para el Elemento Finito se requiere una malla de superficie y para Elemento en la Frontera se requiere solo la discretización de la frontera del dominio en elementos unidimensionales, como se muestra en la figura 3.6. Para análisis en tres dimensiones se requiere una discretización de la superficie del volumen para análisis por Elemento en la Frontera, en contraste con la malla de elementos de volumen que se requiere para el análisis por Elemento Finito.

El resultado de la discretización, igual que en el caso del Elemento Finito es la lista de elementos y conectividades, entonces la frontera Γ de Ω queda definida por:

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j \quad (3.54)$$

3.5.2.2 Proceso

La Etapa de Proceso en el Método del Elemento en la Frontera consiste en las operaciones para obtener los valores numéricos de la función de aproximación ϕ en Ω , esta etapa sigue los mismos pasos que en el análisis por el Método del Elemento Finito, es decir se evalúa la ecuación 3.53, para cada elemento en la frontera de Ω , luego se acumulan en una matriz de rigidez y al final se resuelve un sistema de ecuaciones.

Partiendo de la ecuación 3.53, queda para cada elemento:

$$c(P)\phi(P) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} \omega d\Gamma \quad (3.55)$$

Sobre cada elemento Γ_j se introducen las funciones de forma:

$$\phi_j = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \phi_{j\alpha} \quad (3.56)$$

y

$$q_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial n} = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} q_{j\alpha} \quad (3.57)$$

donde ϕ_j, q_j son valores de ϕ y q en el elemento Γ_j y $\phi_{j\alpha}, q_{j\alpha}$ son valores de ϕ y q en el nodo α sobre el elemento Γ_j .

Estas funciones de forma pueden ser las funciones definidas para el Método del Elemento Finito. En general cuando las funciones de forma se utilizan tanto para la interpolación, como para la discretización, tanto en el Método del Elemento Finito como en el Método del Elemento en la Frontera, esto se conoce como formulación isoparamétrica.

La ecuación 3.55, queda:

$$c(P)\phi(P) + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} \phi_{j\alpha} \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \omega d\Gamma \quad (3.58)$$

Esta ecuación es válida para cualquier punto P en la superficie Γ . Para generar una ecuación por nodo, se coloca P en cada uno de los nodos, por ejemplo si P esta en el nodo i , tenemos:

$$c_i \phi_i + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} \phi_{j\alpha} \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial \omega_i}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \omega_i d\Gamma \quad (3.59)$$

donde ω_i es la solución fundamental con la singularidad en el nodo i , de modo que se puede escribir la ecuación 3.59 de manera abreviada como:

$$c_i \phi_i + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} \phi_{j\alpha} a_{ij}^{\alpha} = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} b_{ij}^{\alpha} \quad (3.60)$$

Con:

$$a_{ij}^{\alpha} = \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial \omega_i}{\partial n} d\Gamma \quad (3.61)$$

$$b_{ij}^{\alpha} = \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \omega_i d\Gamma \quad (3.62)$$

Si se tienen L nodos, se generan L ecuaciones. Entonces se pueden ensamblar estas L ecuaciones en un sistema matricial:

$$\mathbf{A}\phi = \mathbf{B}q \quad (3.63)$$

donde los vectores ϕ y q son de valores nodales para ϕ y q .

En cada nodo se debe especificar ya sea un valor de ϕ o de q , o una combinación de ambos, para tener un problema bien definido, entonces reorganizando la ecuación 3.63, se puede escribir:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.64)$$

con \mathbf{x} el vector de incógnitas. Este sistema se puede resolver usando cualquier método de solución a sistemas de ecuaciones.

Una vez que se ha encontrado \mathbf{x} , es decir todos los valores en la frontera para ϕ y q , se puede usar la ecuación 3.60, para obtener un valor en cualquier punto P dentro del dominio Ω :

$$\phi(P) = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} b_{ij}^{\alpha} - \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} \phi_{j\alpha} a_{ij}^{\alpha} \quad (3.65)$$

Como en el caso del Método del Elemento Finito, las integrales que están indicadas en las ecuaciones 3.61 y 3.62, se evalúan numéricamente.

3.5.2.3 Postproceso

La etapa de postproceso en el Método del Elemento en la Frontera, consiste básicamente en los mismos pasos y cálculos que la etapa de postproceso del Método del Elemento Finito. Debido a que ya se conocen los valores de ϕ , en Ω como resultado de la etapa de proceso. Las técnicas de presentación de resultados y visualización son prácticamente las mismas que en el caso del Método del Elemento Finito.

Capitulo 4. Corrección al Campo Eléctrico

Considerando Factores Atmosféricos

4.1 La Coordinación de Aislamiento, en el Diseño de Líneas de Transmisión

La coordinación de aislamiento se define como "La selección de la rigidez dieléctrica del equipo en relación a las sobretensiones que pueden presentarse en el sistema para el cual esta pensado dicho equipo, tomando en cuenta las condiciones de servicio y las características de los dispositivos de protección disponibles" [16]. Las técnicas de coordinación de aislamiento son muy variadas y dependen de la aplicación, por ejemplo, es diferente la coordinación de aislamiento que se hace para una línea de transmisión, que la que se lleva a cabo para una subestación ó una máquina eléctrica.

En el caso de las líneas de transmisión, la coordinación de aislamiento tiene como objetivo especificar todas las dimensiones o características de la torre de la línea de transmisión, que afecten la funcionalidad y confiabilidad de la línea, entre las cuales se pueden citar:

- Distancias de flameo entre el conductor de fase y los elementos a tierra de la torre, así como la cruceta
- Longitud de la cadena de aisladores
- Número y tipo de aisladores

- Necesidades y tipo de aterrizamiento adicional de la torre
- Localización y número de hilos de guarda
- Distancia fase – tierra a mitad de claro
- Distancia de flameo fase – fase
- Necesidades, selección y localización de apartarrayos en la línea.

Para cuestiones relativas al diseño de líneas aéreas de transmisión de energía eléctrica, la coordinación de aislamiento es la base, ya que una vez que se ha realizado este, se puede proceder a la especificación eléctrica completa y al diseño mecánico de la torre de transmisión.

La coordinación de aislamiento es una tarea de suma importancia desde todos los puntos de vista, sin embargo, resulta una tarea de importancia crítica en el caso de las líneas de transmisión donde se lleva a cabo el trabajo en línea viva.

4.2 Corrección al Valor de la Tensión Crítica de Flameo

4.2.1 Corrección por Factores Atmosféricos

Como ya se mencionó el diseño eléctrico de líneas de transmisión tiene su base en las técnicas de coordinación de aislamiento, y la meta es lograr que la línea de transmisión cumpla con ciertas especificaciones de acuerdo a las normas. Sin embargo, cabe especificar que todos los valores especificados en las normas están referidos a condiciones atmosféricas normalizadas, las cuales son:

1. Temperatura ambiente: 20°C
2. Presión del aire: 101.3 kPa o 760 mm Hg
3. Humedad absoluta: 11 g de agua/m³

Sin embargo, las condiciones atmosféricas en el sitio donde operará la línea de transmisión, rara vez son las condiciones normalizadas, de modo que es necesario realizar una corrección de los valores en las normas a valores en condiciones no normalizadas.

Para introducir esta corrección, se utilizará el ejemplo del impulso de la figura 2.3. Los parámetros del impulso a considerar son: el tiempo a la cresta, el tiempo a la cola y la magnitud o tensión pico

del impulso. En el caso de los tiempos a la cresta y a la cola, quedan determinados por el tipo de impulso que se está modelando, si es un impulso de rayo, ó bien es un impulso de maniobra, mientras que la tensión pico justamente queda determinada por los valores en las normas y se convierte en el parámetro a corregir a condiciones atmosféricas no normalizadas.

Se han llevado a cabo varios trabajos de investigación sobre el tema, en particular por investigadores en países con áreas de gran altitud, donde los factores atmosféricos son muy diferentes a los de las condiciones normalizadas [1], [2].

La corrección clásica del nivel de tensión de ruptura en una prueba de impulso, por ejemplo para la tensión de ruptura U_{50} es:

$$U_{50} = U_{50_0} \delta^n k^w \quad (4.1)$$

con U_{50} la tensión de ruptura en condiciones no normalizadas, U_{50_0} la tensión de ruptura a condiciones normalizadas, δ la densidad relativa del aire, k es un factor de corrección por humedad, n y w dependen de la geometría del electrodo y las características del impulso aplicado [7].

En [1] se hizo un estudio experimental tomando como base este modelo de corrección, realizando mediciones a tres diferentes niveles de altitud: Al nivel del mar (Souvereto en Italia), a 1540 msnm (Apolo en Sudáfrica) y a 1800 msnm (Irapuato en México). En este trabajo se utilizaron diferentes configuraciones en los electrodos, y una de las primeras conclusiones de la experimentación fue la utilización de la siguiente expresión simplificada, debido a que w y n resultan similares:

$$U_{50} = U_{50_0} (\delta k)^n \quad (4.2)$$

Con n :

$$n = \begin{cases} G_0(G_0 - 0.2) & \text{para } 0.3 \leq G_0 \leq 1 \\ \frac{0.8}{(3 - G_0)} & \text{para } 1 \leq G_0 \leq 2 \\ \frac{2G_0}{2G_0} & \end{cases} \quad (4.3)$$

Y:

$$G_0 = U_{50} \left[500D(\delta k)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.4)$$

D es la distancia entre el electrodo de potencial y el de referencia en la geometría utilizada en la experimentación. Sin embargo, esta corrección solo se aplica a configuraciones experimentales no uniformes, con claros grandes, en escala de metros.

De acuerdo a los valores experimentales obtenidos, esta corrección funciona bien para impulsos de rayo, sin embargo no lo hace así para impulsos de maniobra.

Por otro lado en [2] se propone un refinamiento de las correcciones anteriores, tomando en cuenta nueva experimentación hecha a casi 3000 msnm (Topilejo en México), se propone la siguiente ecuación para la corrección de la tensión de flameo considerando la densidad del aire, para electrodos punta – plano bajo impulsos positivos:

$$\frac{U}{U_0} = 0.8(1 + T(1 - \delta)) \frac{\delta - 0.2G_0}{1 - 0.2G_0} + 0.2 \quad (4.5)$$

con

$$T = 1.4F_0^{1.6} \left(1 - \frac{0.8G_0}{1 - 0.2G_0} \right) \quad (4.6)$$

y

$$G_0 = \frac{U_0}{500 \left(1 + \frac{F_0 - 1}{3} \right) D} \quad (4.7)$$

en las expresiones anteriores, F_0 es una constante que depende del electrodo.

Cabe destacar que estos trabajos de investigación, son la base para la parte de correcciones por condiciones atmosféricas de la Guía para Coordinación de Aislamiento en Línea Viva de CIGRE [3], que es la referencia más importante en el área de alta tensión, en la ingeniería eléctrica.

4.2.2 Corrección por la Presencia de Electrodo Flotados

Como se mencionó en el capítulo 2 de este trabajo, para propósitos de modelación de trabajo en línea viva, es importante considerar configuraciones con electrodos flotados en la geometría. En [3], se reporta los trabajos publicados hasta la fecha, y se observa que en general:

- Los electrodos flotados reducen la distancia del gap, quedando la distancia neta, la distancia total del gap reducida por la longitud del electrodo flotado en el eje del gap.
- Afecta la rigidez dieléctrica del gap resultante, debido a la modificación de la distribución de campo eléctrico.

La influencia de los electrodos flotados, depende de un conjunto de parámetros geométricos de los propios electrodos, y de las características del impulso, como se menciona en el capítulo 2 de este trabajo. En [3] se recomienda ajustar el valor de la tensión de flameo de acuerdo a:

$$U_{50} = F_0 C_w U_{50rp} \quad (4.8)$$

donde U_{50rp} es el valor de la U_{50} del electrodo punta plano con la distancia correspondiente a la distancia neta de la configuración con electrodos flotados. El factor C_w , se calcula basándose en una interpolación de los datos experimentales que se han reportado, usando un polinomio de quinto grado:

$$C_{w(\frac{1}{2}=0.4)} = 0.026D^5 - 0.033D^4 + 0.124D^3 - 0.049D^2 + 0.415D - 10225 \quad (4.9)$$

el factor de corrección queda:

$$C_w = \begin{cases} 1 - (1 - C_{w(\frac{1}{2}=0.4)}) (1 - e^{-20(\beta-0.1)}) & \text{si } \beta \geq 0.1 \text{ y } D \leq 4 \\ 1 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (4.10)$$

como ya se mencionó D es la distancia neta entre el electrodo de potencial y la referencia (obtenida restando la suma de las longitudes de los electrodos flotados a distancia total entre el electrodo de potencial y la referencia). El parámetro β es la relación entre la suma de las longitudes de los electrodos flotados a la longitud total del electrodo de potencial a la referencia.

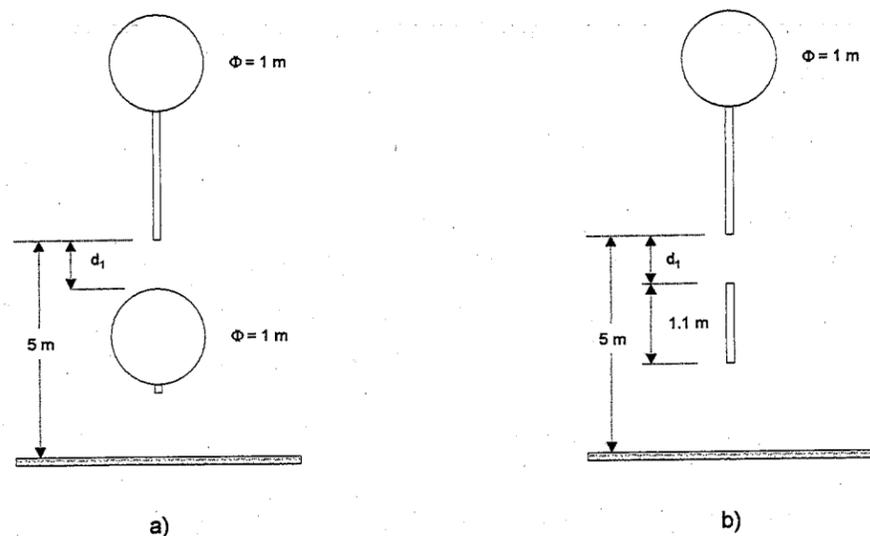


Figura 4.1. Electrodo utilizado en la experimentación a 1710 msnm. a) Electrodo punta - plano con electrodo flotado en forma de esfera con una protuberancia en la superficie anódica. b) Electrodo punta - plano con electrodo flotado en forma de barra.

4.3 Experimentación Realizada a 1710 msnm

Con el propósito de verificar la exactitud de las correcciones propuestas en [3], se llevó a cabo cierta experimentación en LAPEM - CFE a una altitud de 1710 msnm, los resultados obtenidos fueron reportados en [4]. Se utilizaron tres diferentes modelos para simular las condiciones de trabajo en línea viva, y se tomaron en consideración las condiciones críticas mencionadas en el capítulo 2 del presente trabajo. Las configuraciones utilizadas fueron:

- Electrodo punta - plano con electrodo flotado en forma de esfera con una protuberancia en la superficie anódica, mostrado en la figura 4.1 (a).
- Electrodo punta - plano con un electrodo flotado en forma de barra, mostrado en la figura 4.1 (b).

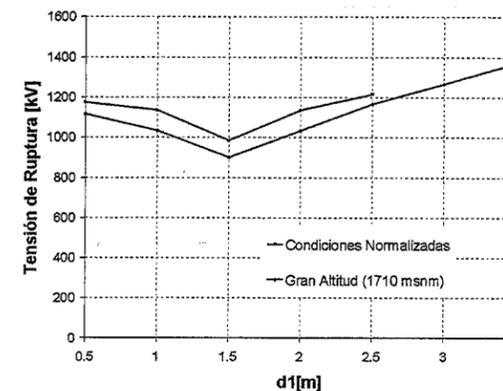


Figura 4.2. Resultados experimentales para el electrodo punta - plano con electrodo flotado en forma de esfera con una protuberancia en la superficie anódica, bajo impulsos positivos 60/900 μ s, en condiciones atmosféricas normalizadas y a 1710 msnm.

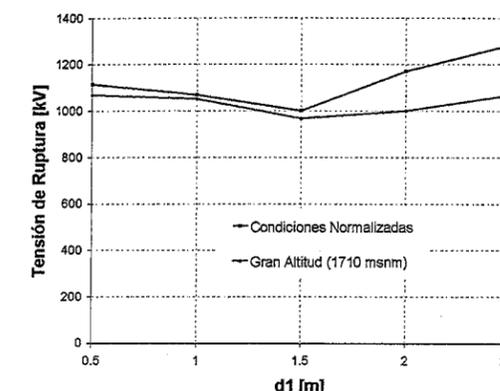


Figura 4.3. Resultados experimentales para el electrodo punta - plano con electrodo flotado en forma de barra, bajo impulsos positivos 60/900 μ s, en condiciones atmosféricas normalizadas y a 1710 msnm.

Para las dos configuraciones se reportan las tensiones de ruptura para diferentes valores de la distancia neta del electrodo, tanto al nivel del mar, como a 1710 msnm, usando impulsos de 60/900 μ s; los resultados se muestran en la figura 4.2 y 4.3.

Justamente [4] sirve como base para el presente trabajo, que a diferencia de los artículos que se han venido publicando, pretende ser menos práctico, pues se propone una corrección al campo eléctrico, antes que a la tensión de ruptura. Para en un trabajo futuro tratar de encontrar la corrección a la tensión de flameo a través de la teoría del rompimiento.

4.4 Cálculo de Campo Eléctrico Considerando Factores Atmosféricos

4.4.1 El Campo Eléctrico y la Tensión de Ruptura

De acuerdo a los resultados que se muestran en las figuras 4.2 y 4.3, hay una ligera variación de comportamiento en cuanto a la tensión de ruptura al variar la altitud. Estos resultados experimentales se pueden tomar de base para proponer una estrategia que permita encontrar una

explicación física a este comportamiento y eventualmente identificar los parámetros que intervienen en este comportamiento.

Siguiendo una lógica causa – efecto, de acuerdo a la física de la descarga, la ruptura o descarga eléctrica entre los electrodos se debe al campo eléctrico que se establece cuando se inyecta el potencial a uno de los electrodos, entonces de acuerdo a la teoría de la descarga eléctrica, existe un gradiente de potencial máximo (magnitud de campo eléctrico) que el dieléctrico puede soportar, justamente esto da el valor de la rigidez dieléctrica para un material dieléctrico, al pasar el valor de la magnitud de campo eléctrico de la rigidez dieléctrica en algún lugar en el dieléctrico, aumenta la probabilidad de que se forme una descarga, como se menciona en el capítulo 2 de este trabajo.

Entonces, resulta clave conocer la distribución de campo eléctrico en las condiciones experimentales que establecen las figuras 4.2 y 4.3, ya que en estos casos, se conoce el comportamiento del electrodo usado, tanto al nivel de mar, como a 1710 msnm. Sin embargo, cabe la aclaración que con el grado de conocimiento disponible actualmente, no es posible determinar la tensión de flameo a partir de la distribución de campo eléctrico, ya que en este proceso intervienen factores estadísticos y los modelos de comportamiento, como por ejemplo el descrito en el capítulo 2, aún no están del todo resueltos.

Para calcular la distribución de campo eléctrico, es necesario resolver la ecuación 2.18, en el dominio definido por la geometría usada en el electrodo. Como se mencionó en el capítulo 3 de este trabajo, existen varios métodos para resolver la ecuación 2.18, en este caso es preferible utilizar métodos numéricos, específicamente se ha utilizado el Método del Elemento Finito o bien, una variante de éste, el Método del Elemento en la Frontera, para resolver problemas con este tipo de ecuaciones en dominios geométricos reales, con buenos resultados.

4.4.1.1 Cálculo del Campo Eléctrico por el Método del Elemento Finito con ANSYS

Como se mencionó en el capítulo tres, el Método del Elemento Finito es un método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera, justamente el caso del problema que se está resolviendo.

Como se describió el Método del Elemento Finito consta de tres etapas:

- Pre - proceso
- Proceso
- Post – Proceso

En este trabajo se utilizó una herramienta comercial para la aplicación del Método del Elemento Finito, el ANSYS de ANSYS Inc. ANSYS es una de las herramientas más populares para el análisis por el Método del Elemento Finito, a escala mundial, su principal fortaleza es el manejo de campos acoplados, por ejemplo se puede analizar el resultado de elemento finito para un problema de campo electromagnético y utilizar el resultado para analizar un problema de transferencia de calor. Esta característica posibilita el uso de ANSYS en una gran variedad de problemas de ingeniería.

4.4.1.1.1 Pre - Proceso de Elemento Finito con ANSYS

El Pre – Proceso del Método del Elemento Finito, como se mencionó en el capítulo 3 de este trabajo, consiste básicamente en la discretización del dominio. Para este propósito, ANSYS tiene implementada la herramienta MeshTool, mediante la cual ya sea de manera manual o automática, se discretiza una región del dominio con los elementos que se requiera, es decir, se debe definir que elemento utilizar, y se puede también definir cuantos elementos se deben usar en la discretización, aunque este parámetro se puede dejar libre (automático) e irlo cambiando hasta lograr la convergencia.

Un factor que a menudo es confuso en problemas de dominio abierto, como en el caso de problemas eléctricos y magnéticos, es justamente que el dominio no está confinado a regiones cerradas, como en el caso de los problemas estructurales. Para la aplicación del Método del elemento Finito en estos casos, es necesario definir una región virtual que encierra el dominio del problema. La definición de esta frontera virtual, queda resuelta por los valores de solución para la variable de potencial que se consideren significativos, es decir se debe plantear una frontera virtual y revisar los valores de potencial, entonces ir creciendo la frontera hasta que los valores ya no sean significativos.

Sin embargo, existe un problema que plantea la aplicación del Método del Elemento Finito en problemas con dominios abiertos. Este problema consiste en que al definir una frontera virtual arbitraria en el dominio, se deben establecer condiciones de frontera (de Neumann) para esta frontera virtual, esta condición de frontera debe ser: ya sea que el flujo es normal a esta frontera o bien, el flujo es paralelo a la frontera, ambas condiciones son artificiales y producen soluciones equivocadas. Sin embargo, existe la manera de resolver este problema, utilizando elementos de frontera infinita (disponibles en ANSYS).

La aplicación de elementos de frontera infinita en la última parte del dominio, resuelve el problema de líneas de flujo forzadas a ser normales o paralelas a la frontera virtual de solución: Mediante la interpolación de las trayectorias de flujo en los elementos de frontera infinita, tomando en cuenta los valores de potencial que se obtienen en los elementos interiores, para así, corregir las líneas de

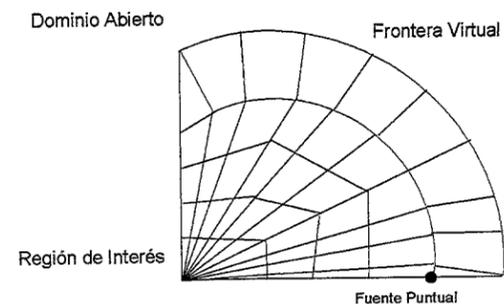


Figura 4.4. Un problema de dominio abierto con una fuente de potencial puntual, con una frontera virtual para marcar la región de interés, discretizado con elementos cuadriláteros y triangulares para el análisis por el Método del Elemento Finito.

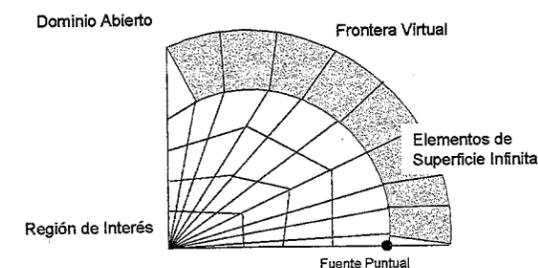


Figura 4.6. Geometría del problema de la figura 4.4, discretizado con elementos de superficie infinita en la última capa de contacto con la frontera virtual.

flujo. La figura 4.4, muestra un dominio abierto modelado con elementos normales, sujeto a la acción de un campo de potencial en la esquina inferior, la figura 4.5 muestra la solución obtenida suponiendo condiciones de flujo normal a la frontera virtual definida.

Por otro lado la figura 4.6, y la figura 4.7, muestran la discretización y la solución obtenida modelando la última capa de la malla con elementos de frontera infinita, respectivamente.

4.4.1.1.2 Proceso de Elemento Finito con ANSYS

La etapa de proceso del Método del elemento Finito, consiste en todos los pasos necesarios para obtener una solución numérica para la función de potencial, y en este caso, al utilizar ANSYS, este

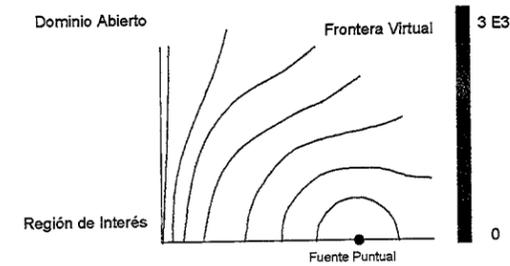


Figura 4.5. Solución obtenida para el problema de dominio abierto de la figura 4.4, estableciendo condición de Neumann normal a la superficie de la frontera virtual

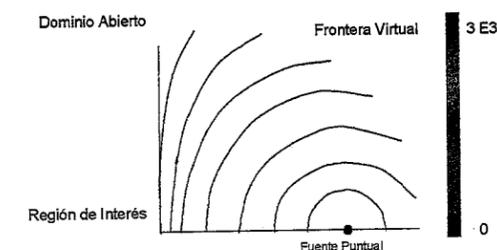


Figura 4.7. Solución obtenida para el problema de dominio abierto de la figura 4.6.

proceso es automático, cabe destacar que ANSYS considera la aplicación de las condiciones de frontera en esta etapa.

Así pues, se procede a establecer las condiciones de frontera, que básicamente son condiciones de Dirichlet en el electrodo de potencial, y en electrodo de referencia y de Neumann en el electrodo flotado. ANSYS ensambla la matriz de rigidez, y el vector de cargas, para luego resolver el sistema de ecuaciones correspondiente a la ecuación 3.27.

A pesar de que ANSYS realiza el proceso de manera automática, existe un detalle que debe ser considerado: la convergencia, es decir, es necesario ir refinando la malla de elementos finitos hasta obtener la misma distribución para la función de potencial en el dominio, es decir hasta lograr la convergencia:

4.4.1.1.3 Post – Proceso de Elemento Finito con ANSYS

El post - proceso del análisis por el Método del Elemento Finito, consiste básicamente en la revisión de resultados, y puede realizarse de diferentes maneras en ANSYS. Se puede obtener un mapa de colores correspondiente al valor de la función de potencial, ó al gradiente de esta, o bien puede observarse el gradiente de la función de potencial con su representación vectorial de flechas. La elección del post – proceso depende totalmente de las cantidades analizadas y del tipo de problema. Para el problema que se está resolviendo en este trabajo, el post – proceso más útil es la solución numérica de la magnitud del campo eléctrico en el eje del electrodo, ya que esta zona es crítica, como se mencionó en el capítulo 2 de este trabajo.

4.4.1.2 Cálculo del Campo Eléctrico por el Método del Elemento en la Frontera

El Método del Elemento en la Frontera es una variante del Método del Elemento Finito que cuando se puede aplicar, reduce considerablemente el tamaño del problema numérico a resolver. Sin embargo, como se mencionó en el capítulo tres, se considera al Método del Elemento en la Frontera como un método independiente para resolver ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera, de manera numérica. El Método del Elemento en la Frontera también consta de tres etapas:

- Pre – Proceso
- Proceso
- Post – Proceso

En este trabajo se utilizó un software comercial propiedad de LAPTEM. Se trata de una herramienta para el análisis por el Método del Elemento en la Frontera en dominios bidimensionales en electrostática. La principal ventaja del uso de esta herramienta reside en el Método del Elemento en la Frontera, es decir la solución se obtiene de manera más rápida y al discretizar solo la superficie del dominio, en problemas dos dimensionales, la discretización es muy simple y por tanto muy rápida. Además el software usado cuenta con un algoritmo de convergencia automático que a partir de un valor de tolerancia dado, refina la discretización hasta obtener la convergencia del método de manera automática. Obviamente una desventaja de esta herramienta es que no es posible realizar análisis tridimensionales y al no ser siempre posible la aplicación del Método del Elemento en la Frontera en todos los problemas, no es posible manejar campos acoplados.

4.4.1.2.1 Pre – Proceso de Elemento en la Frontera

El pre – proceso del Método del Elemento en la Frontera, de manera similar al caso del Método del Elemento Finito consiste básicamente en la discretización del dominio. Para este propósito ELECTRO cuenta con un algoritmo de discretización dinámico, de modo que no es necesario configurar nada para este proceso.

De manera similar a ANSYS, para el caso de problemas con dominios abiertos, se establece una frontera virtual. Sin embargo, debido a que la solución se obtiene primero en la frontera de la geometría, y luego se va interpolando hacia el resto del dominio, no es necesario discretizar de una manera especial en los problemas de dominio abierto. En este caso, la frontera virtual sirve únicamente para establecer las regiones donde se requiere obtener valores para la función de potencial y los lugares donde no interesan resultados.

4.4.1.2.2 Proceso de Elemento en la Frontera

Una vez que se ha discretizado el dominio, se establecen las condiciones de frontera, de manera similar a como se hizo para el Método del Elemento Finito, es decir condiciones de Dirichlet en el electrodo de potencial y en la referencia y de Neumann en el electrodo flotado.

Finalmente se establece la tolerancia para la convergencia y se comienza con la solución para la discretización inicial, para luego eventualmente seguir refinando la discretización hasta lograr la convergencia.

4.4.1.2.3 Post - Proceso de Elemento en la Frontera

El post – proceso puede realizarse básicamente igual a en ANSYS para el caso de problemas electrostáticos, es decir se pueden visualizar, los valores para el potencial, para el gradiente de potencial, y se puede ver en mapa de colores continuo, por líneas discretas o bien por superficies en tercera dimensión, con la altura proporcional a la magnitud del potencial o del gradiente de potencial.

4.4.2 Variación de la Distribución de Campo Eléctrico con las Condiciones Atmosféricas

Debido a que aplicando el Método del elemento Finito, ó bien con el Método del Elemento en la Frontera, se puede conocer la distribución de campo eléctrico en las condiciones experimentales que se usaron en [4]. Y debido a que en ese mismo trabajo, existe una comparación para la misma geometría a dos diferentes altitudes, es posible comparar las distribuciones de campo eléctrico que se establecieron en cada uno de los experimentos, con el fin de identificar los parámetros responsables del diferente comportamiento exhibido en las figuras 4.2 y 4.3.

Como el interés de este trabajo es investigar el comportamiento del campo eléctrico en aire con diferentes condiciones atmosféricas, entonces la base para las comparaciones la constituyen las figuras 4.2 y 4.3, ya que en estas figuras se reportan las tensiones de ruptura con la misma configuración de electrodo, tanto al nivel del mar, como a 1710 msnm.

Como ya se ha mencionado antes en este trabajo, la descarga eléctrica entre los electrodos se debe a que la magnitud de campo eléctrico es mayor que la rigidez dieléctrica en ciertas zonas del dominio, ó en otras palabras, la tensión de ruptura que se reporta en las figuras 4.2 y 4.3 se relaciona a cierto campo eléctrico.

A su vez, el campo eléctrico de acuerdo a la teoría electrostática se gobierna por la ecuación de Poisson (ecuación 2.18), que únicamente tiene como parámetros a la permitividad relativa del material dieléctrico ϵ y a la densidad de carga ρ . Sin embargo, en las condiciones experimentales que se establecieron, los electrodos se encuentran descargados al inicio, de modo que el término de densidad de carga es cero, lo que como también ya fue mencionado, corresponde al caso de la ecuación de Laplace (ecuación 3.43). De esta manera el único parámetro en el experimento es la permitividad relativa del medio dieléctrico, es decir del aire.

Como únicamente existe un parámetro en la ecuación de campo eléctrico, es muy probable que el comportamiento de las figuras 4.2 y 4.3, pueda ser explicado mediante una variación de dicho parámetro. Sin embargo, en este punto este hecho queda en calidad de hipótesis, aunque cabe destacar que como se mencionó en el capítulo 2, de acuerdo a la teoría microscópica de los dieléctricos, la permitividad relativa depende de factores electromagnéticos y físicos a escala molecular del material, como campo interno, polarización y número de moléculas, los cuales se espera que cambian al variar las condiciones atmosféricas.

Otra cuestión importante que debe ser verificada mediante simulación es el hecho de que cuando se produce una descarga, entonces significa que el campo eléctrico tiene una distribución tal, que ha causado la ionización del aire a un punto en el que se han formado y completado las avalanchas de descarga, este campo eléctrico un instante antes de la descarga lo denominaremos Campo Eléctrico Crítico. Entonces un punto importante en la hipótesis de la variación de la permitividad relativa con los factores atmosféricos es la comprobación de la existencia del Campo Eléctrico Crítico para una configuración de electrodo, aún cuando varíen los parámetros del electrodo.

Capítulo 5. Resultados

5.1 Estrategia de Solución

La estrategia que se siguió en este trabajo es la siguiente:

1. Cálculo de la distribución de campo eléctrico para cada una de las condiciones experimentales, esto es para cada valor de la distancia del electrodo con su correspondiente valor de tensión de flameo de acuerdo a las figuras 4.2 y 4.3.
2. Comprobación de la existencia del Campo Eléctrico Crítico, comparando la distribución de campo eléctrico con los valores de la tensión de flameo y distancia del electrodo para cada una de las configuraciones, de acuerdo a las condiciones de las figuras 4.1, 4.2 y 4.3.
3. Búsqueda del valor de permitividad relativa del aire tal que se igualen las distribuciones de campo eléctrico en las dos condiciones de altitud disponibles, con las configuraciones usadas, bajo los valores de tensión de flameo correspondientes, de modo que este valor de la permitividad relativa del aire es el que establece el Campo Eléctrico Crítico que provoca la descarga en condiciones atmosféricas no normalizadas. La búsqueda de este valor se debe hacer de manera experimental por comparación con el Campo Eléctrico Crítico para el caso de condiciones atmosféricas normalizadas.
4. Cálculo de los parámetros que se involucran con el valor de la permitividad relativa del aire, para calcular a esta, de manera analítica en condiciones no normalizadas según el experimento, es decir a 1710 msnm y compararla con el valor encontrado por simulación.

5. Comparación del campo eléctrico calculado mediante la corrección de la permitividad relativa del aire en condiciones no normalizadas, con el se establecería si la corrección se hiciera según la recomendación de [3].

Los resultados de los cálculos se reportan a continuación.

5.2 Cálculo Numérico de Campo Eléctrico

5.2.1 Cálculo de Campo Eléctrico en el Electrodo Punta – Plano con Electrodo Flotado

De acuerdo a la estrategia, el punto inicial es el cálculo del campo eléctrico para los casos definidos en la figura 4.1, en las condiciones de las figuras 4.2 y 4.3. Como ya se mencionó, el cálculo se llevó a cabo por medio del Método del Elemento Finito y del Método del Elemento en la Frontera utilizando en ambos casos herramientas.

5.2.1.1 Cálculo por el Método del Elemento Finito Usando ANSYS

Para el cálculo del campo eléctrico por medio de ANSYS, se realizaron los tres pasos clásicos del Método del Elemento Finito: pre – proceso, proceso y post – proceso para cada una de las configuraciones de la figura 4.1.

5.2.1.1.1 Electrodo Flotado en Forma de Esfera

En el caso de la configuración de electrodo punta – plano con electrodo flotado en forma de esfera con una protuberancia, que define la figura 4.1 a, se realizó el cálculo del campo eléctrico en cada una de las condiciones definidas por la figura 4.2 para los casos con condiciones normalizadas.

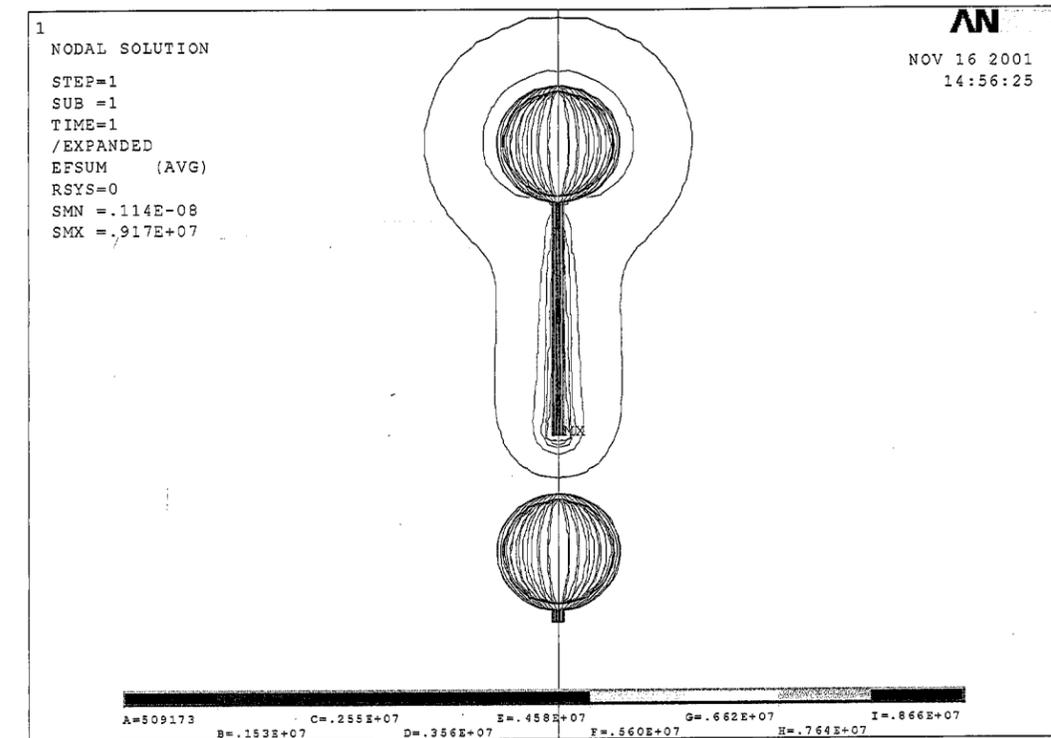


Figura 5.1. Solución de Campo Eléctrico obtenida en ANSYS para la configuración de la figura 4.1 a, con 1175 kV aplicados en el electrodo de potencial, con una distancia entre electrodos de 0.5 m.

La malla de elementos finitos para este caso es la que se muestra en la figura 3.5, conteniendo elementos triangulares de 6 nodos y cuadriláteros de 8 nodos, tanto normales como de superficie infinita en la última capa de la región discretizada. La discretización se realizó con la herramienta MeshTool de ANSYS y con las condiciones de mallado automático. Cabe destacar que la malla que se muestra en la figura 3.5 es la correspondiente a la convergencia de la solución.

Como ya se ha mencionado en el capítulo 4, las condiciones de frontera para este caso son: el potencial en el electrodo superior para cada caso, de acuerdo a la figura 4.2 (condiciones normalizadas), flujo normal cero en el electrodo flotado y potencial cero en la superficie inferior de la geometría.

La solución del análisis por el Método del Elemento Finito para uno de los casos de la figura 4,2 es la que se muestra en la figura 5.1 (tensión de ruptura de 1175 kV, distancia entre el electrodo de potencial y el electrodo flotado 0.5 m, con permitividad relativa de aire seco en condiciones normalizadas, de 1.0006). Las figuras 5.2 y 5.3 muestran otras posibles formas de visualizar la solución de campo obtenida.

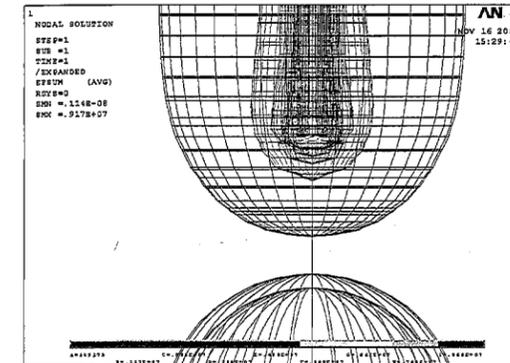


Figura 5.2. Visualización tridimensional de la solución de campo eléctrico de la figura 5.1, en la zona del gap entre los electrodos. El post – proceso que se muestra corresponde a superficies equipotenciales

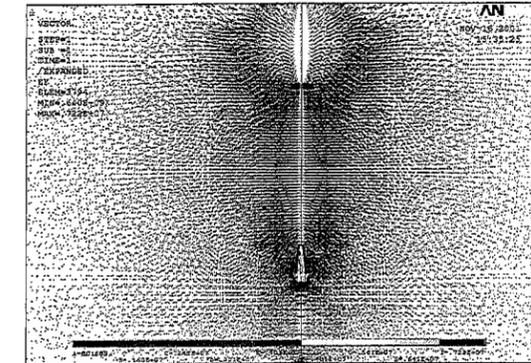


Figura 5.3. Visualización tridimensional de la solución de campo eléctrico de la figura 5.1, en la zona de los electrodos. Post – proceso de representación de magnitud y dirección de campo con flechas.

5.2.1.1.2 Electrodo Flotado en Forma de Barra

Para el electrodo punta – plano con un electrodo flotado en forma de barra, que se muestra en la figura 4.1 (b), se realizó también el cálculo de campo eléctrico para los puntos de descarga que indica la figura 4.3, en condiciones normalizadas. Las condiciones de frontera son similares al caso anterior, con la tensión de rompimiento en el electrodo superior, tensión cero en la superficie de referencia y flujo normal cero en el electrodo flotado.

La discretización para este caso se muestra en la figura 5.4 y la solución obtenida para el primer caso que indica la figura 4.3 (tensión de rompimiento de 1115 kV, distancia entre gaps de 0.5m y permitividad relativa de 1.0006) la solución se muestra en la figura 5.5

5.2.1.2 Cálculo de Campo Eléctrico con Software Basado en el Método del Elemento en la Frontera

También se realizó el cálculo del campo eléctrico con la herramienta comercial que utiliza el Método del Elemento en la Frontera. Como se mencionó en el capítulo 3, el Método del Elemento en la Frontera también involucra tres pasos: pre – proceso, proceso y post – proceso. También para este método se realizaron los cálculos para cada uno de los puntos de condiciones normalizadas de la figura 4.2.

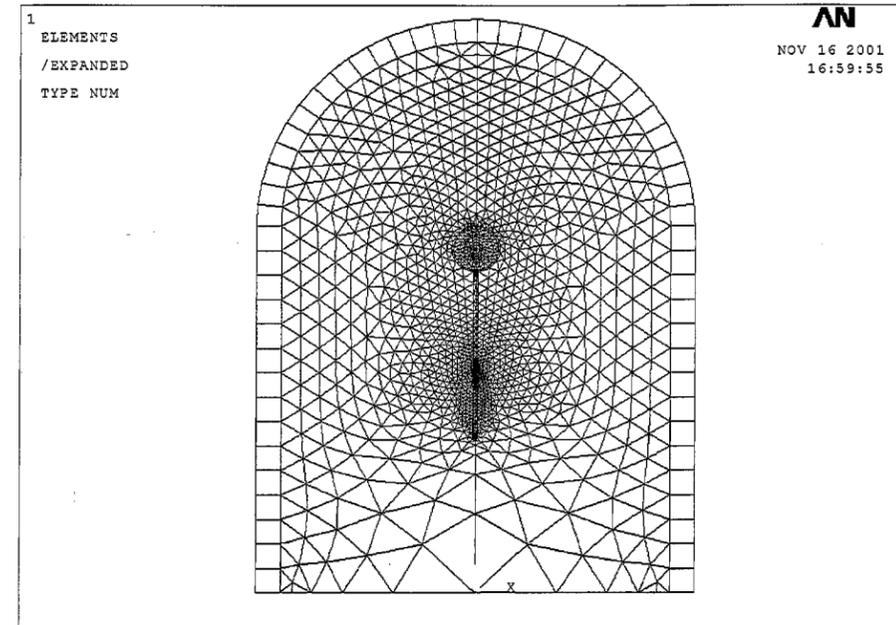


Figura 5.4. Discretización para análisis de elemento finito para la configuración de la figura 4.1 b.

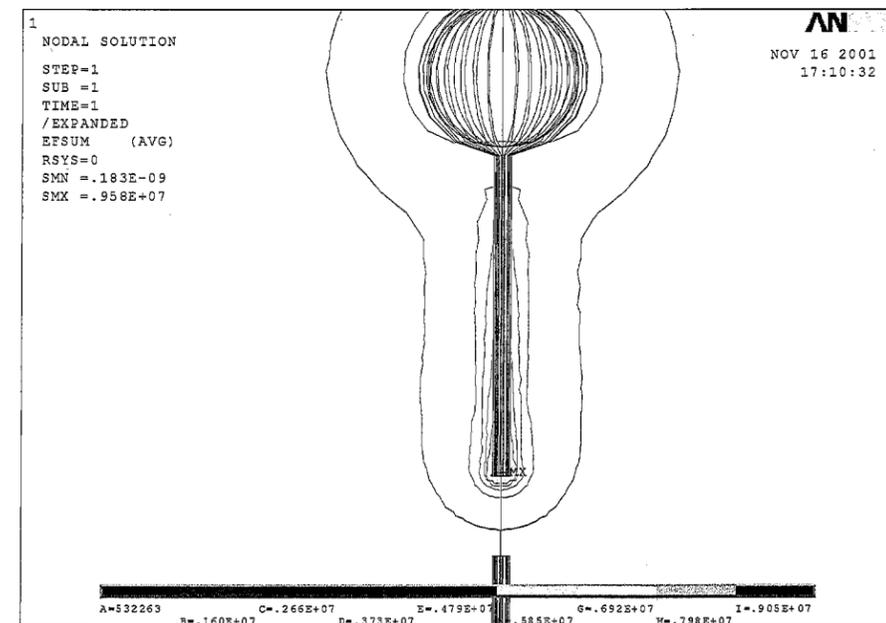


Figura 5.5. Solución obtenida en ANSYS para la configuración de la figura 4.1 b, con 1115 kV aplicados al electrodo de potencial y 0.5 m de distancia entre los electrodos.

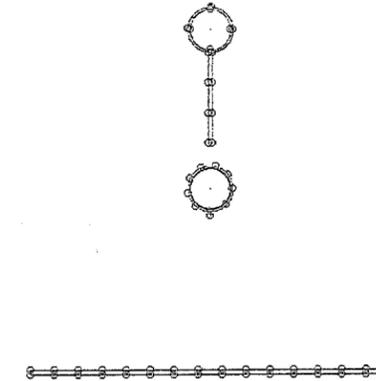


Figura 5.6. Discretización de la configuración de la figura 4.1 a, para análisis por el Método del Elemento en la Frontera. Cortesía de LAPEM.

5.2.1.2.1 Electrodo Flotado en Forma de Esfera

Para el electrodo punta – plano con un electrodo flotado en forma de esfera, se repitieron los cálculos que se realizaron con el Método del Elemento Finito, es decir la configuración de la figura 4.1 (a) con las condiciones de la figura 4.2, para el caso de condiciones normalizadas.

El pre – proceso consiste en la discretización de la superficie, en la figura 5.6 se muestra la discretización inicial. Las condiciones de frontera son las mismas que las del caso el Método del Elemento Finito.

La solución para una de las configuraciones de la figura 4.2 se muestra en la figura 5.7. Como se mencionó en el capítulo 4, el post – proceso más útil de acuerdo a la estrategia planteada es simplemente los valores de la magnitud de campo eléctrico en diferentes lugares de la geometría, sin embargo con el fin de ejemplificar las diferentes formas que el software puede presentar los resultados, se muestra la solución de la figura 5.7 de diferentes formas: en la figura 5.8 se muestra una sabana en tres dimensiones con la altura proporcional al valor de la magnitud de campo, y en la figura 5.9 se muestra la representación del campo por medio de flechas.

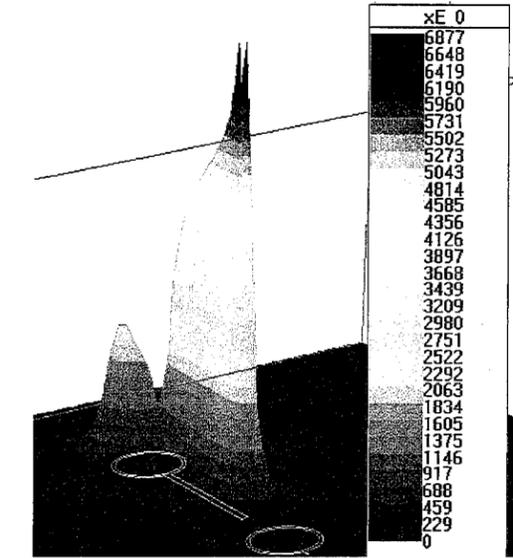
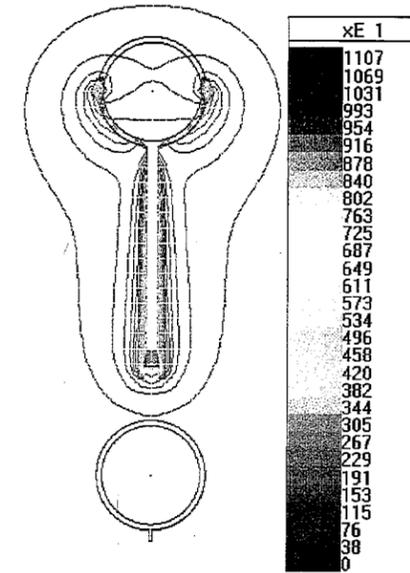


Figura 5.7. Solución de campo obtenida en ELECTRO para la configuración de la figura 4.1 a, con 1175 kV y una distancia entre electrodos de 0.5 m. Cortesía de LAPEM

Figura 5.8. Post – proceso en perfiles 3D para la solución de la figura 5.7. Cortesía de LAPEM

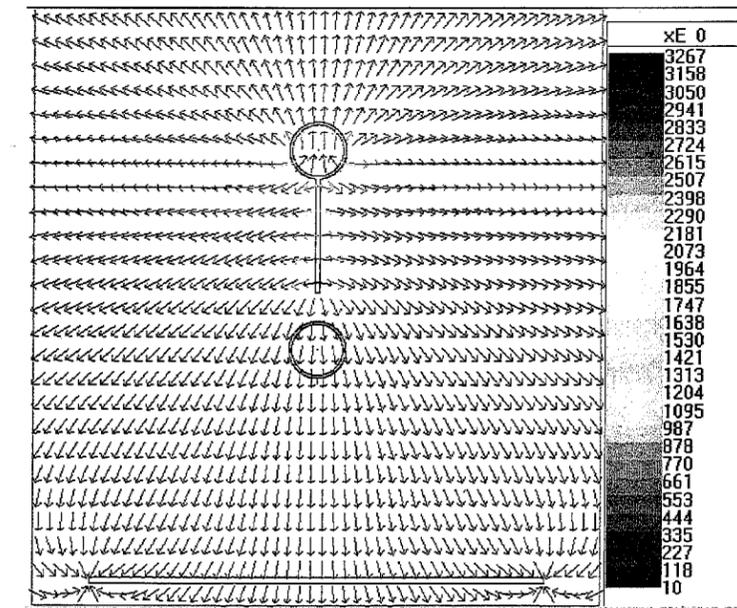


Figura 5.9. Representación en flechas del campo de la figura 5.7. Cortesía de LAPEM.

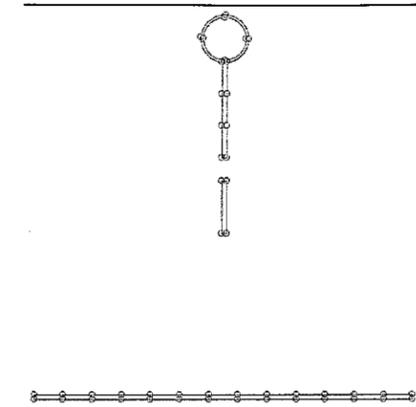


Figura 5.10. Discretización de la configuración de la figura 4.1 b, para análisis por el Método del Elemento en la Frontera. Cortesía de LAPEM.

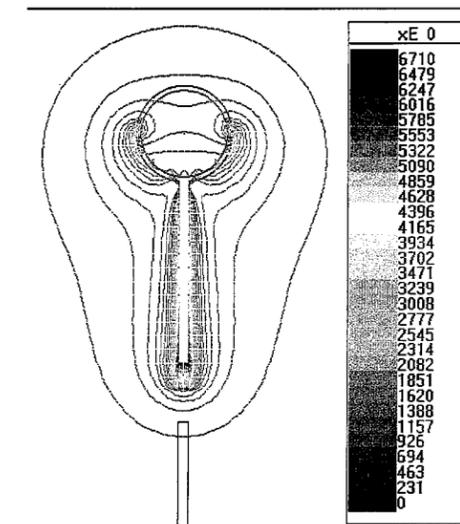


Figura 5.11. Solución de campo eléctrico obtenida en ELECTRO para la configuración de la figura 4.1 b, con 1115 kV en el electrodo de potencial y 0.5 m entre los electrodos. Cortesía de LAPEM.

5.2.1.2.2 Electrodo Flotado en Forma de Barra

En el caso del electrodo punta – plano con el electrodo flotado en forma de barra con la longitud alineada en el eje del electrodo que muestra la figura 4.1 (b), se repitieron los cálculos realizados con ANSYS, obteniéndose resultados prácticamente iguales.

La figura 5.10 muestra la discretización inicial, y la figura 5.11 muestra la solución de campo eléctrico obtenida con las condiciones de frontera iguales al caso resuelto en ANSYS.

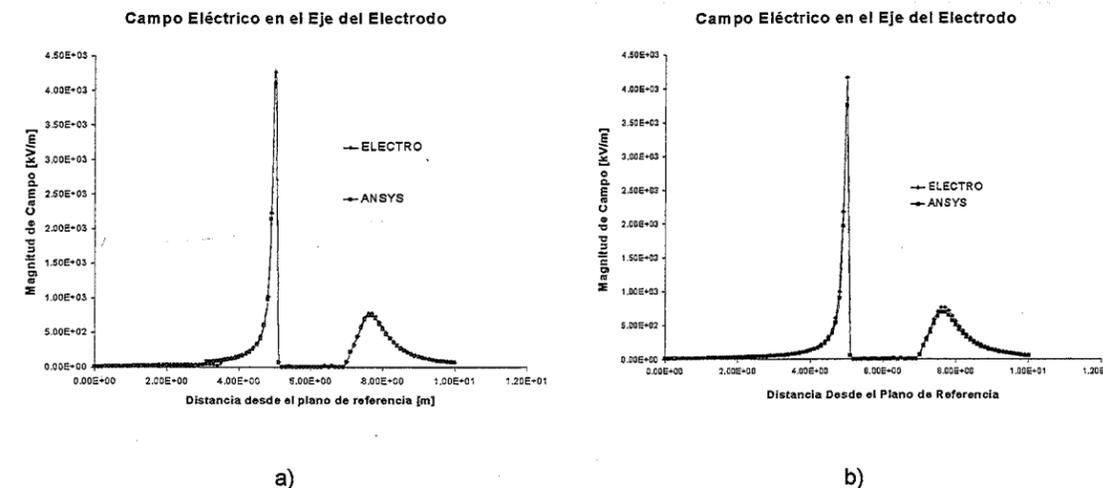


Figura 5.12. Comparación de soluciones obtenidas en ANSYS y ELECTRO para la magnitud del campo en el eje del electrodo. a) En el electrodo de la figura 4.1 a. b) En el electrodo de la figura 4.1 b.

Cabe hacer mención que los resultados con ambos métodos coinciden para cada caso en la figura 4.2 y 4.3, y como se mencionó anteriormente, de acuerdo a la estrategia el resultado más útil de cada una de las herramientas fue el archivo de datos numéricos correlacionados con la geometría, con el fin de hacer comparaciones. La figura 5.12 a muestra la magnitud de campo eléctrico en el eje del electrodo, para la configuración de la figura 4.1 (a), en las condiciones del primer punto de la figura 4.2, para condiciones normalizadas, calculada tanto en ANSYS, como en el software basado en el Método del Elemento en la Frontera. La figura 5.12 b muestra la misma comparación, para el caso de la configuración de la figura 4.1 b.

5.3 Determinación del Campo Eléctrico Crítico

Para la determinación del Campo Eléctrico Crítico, se debe comparar los campos que se establecen en cada ocasión que se presenta una descarga completa en el electrodo. La comparación se realizó tanto para el electrodo de la figura 4.1 a, como para el de la figura 4.1 b, en condiciones atmosféricas normalizadas.

De acuerdo a lo expuesto en el capítulo 4, si las distribuciones de campo eléctrico coinciden para un electrodo cada vez que se presenta una descarga, aún cuando se hayan variado los parámetros

del electrodo, entonces se puede concluir que el campo eléctrico que se establece durante la descarga es justamente el campo eléctrico crítico.

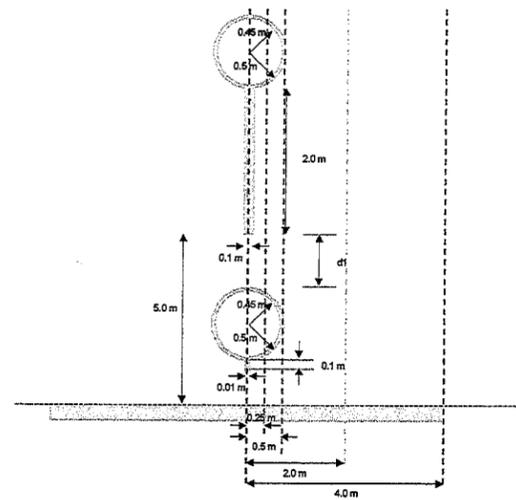


Figura 5.13. Definición de regiones de comparación de campo eléctrico para el electrodo de la figura 4.1 a, en cada ocasión de descarga.

5.3.1 Electrodo Flotado en Forma de Esfera

Para el electrodo de la figura 4.1 a, se definieron ciertos lugares del dominio en los que se va a comparar la magnitud de campo eléctrico, estas regiones se definen en la figura 5.13. Las regiones corresponden al eje del electrodo, a una distancia correspondiente a la mitad del radio del electrodo en forma de esfera, a una línea tangente al electrodo en forma de esfera, a una distancia media del arreglo (2 m del eje) y a una distancia alejada del arreglo (4 m del eje). De acuerdo a la figura 4.1 a, se realizó el cálculo del campo eléctrico para cada uno de los casos de la figura 4.2, en condiciones normalizadas, y se obtuvo el vector de la magnitud de campo en cada una de las líneas definidas por la figura 5.13, (debido a que la geometría y el campo eléctrico tiene simetría axial, la línea realmente se trata de un cilindro equipotencial). Los resultados se muestran en la figura 5.14.

Como se puede observar en la figura 5.14, la distribución de campo eléctrico prácticamente coincide en cada una de las regiones comparadas, por lo que se puede concluir que el campo eléctrico que se muestra corresponde al campo eléctrico crítico, y de acuerdo a esto, cada vez que se establezca esta distribución de campo eléctrico en el electrodo en cuestión, existe una probabilidad de 50% de que se produzca una descarga eléctrica.

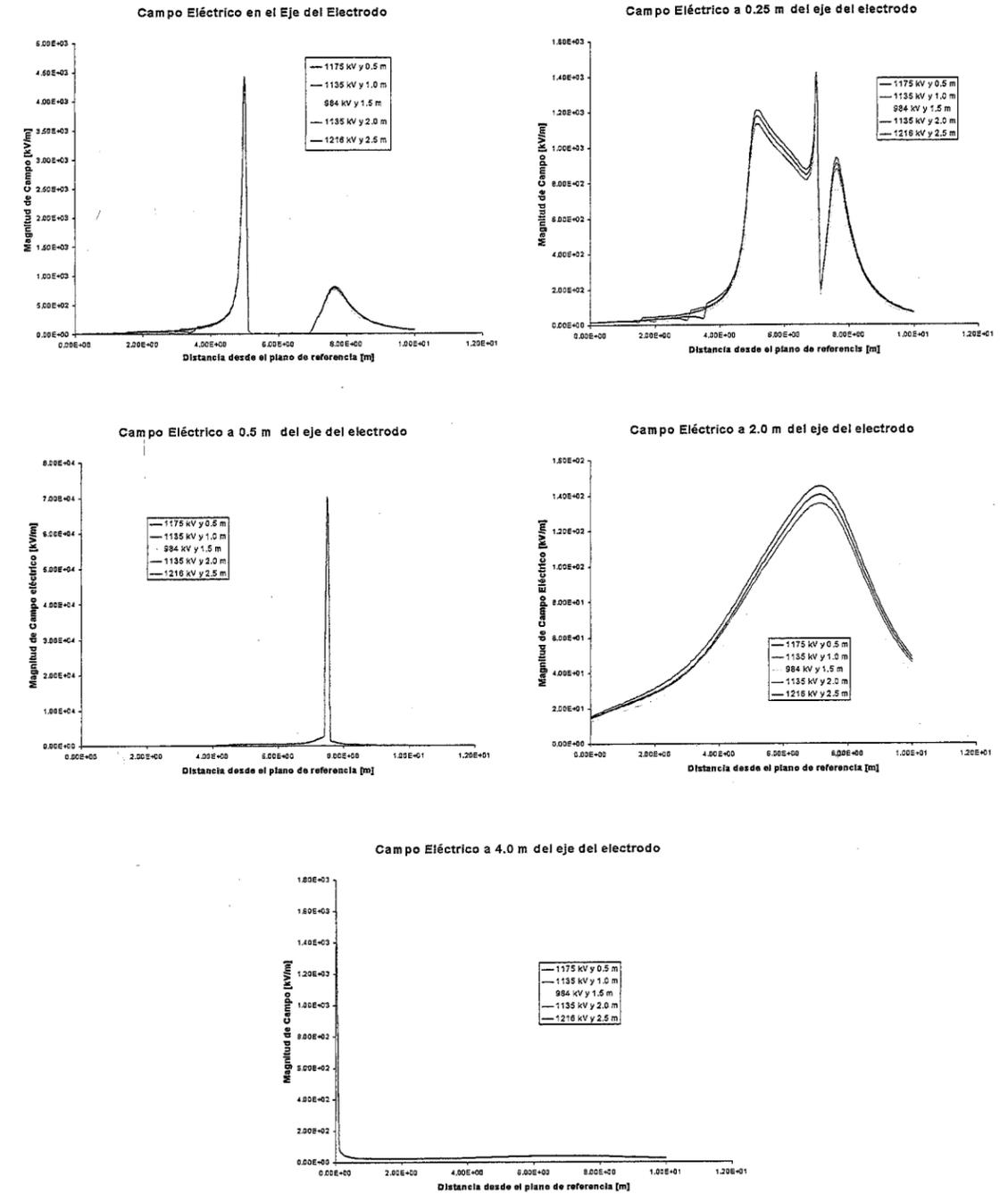


Figura 5.14. Comparación de campo eléctrico en las regiones definidas por la figura 5.13, para la configuración de la figura 4.1 a, con diferentes valores para la tensión de rompimiento y distancia entre electrodos.

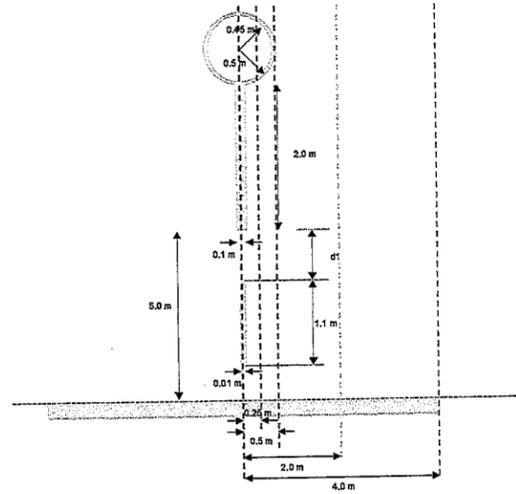


Figura 5.15. Definición de regiones de comparación de campo eléctrico para el electrodo de la figura 4.1 b, en cada ocasión de descarga.

5.3.2 Electrodo Flotado en Forma de Barra

En la figura 5.15 se muestran las líneas para la comparación de la distribución de campo, prácticamente coinciden con las del caso anterior, en cuanto a las distancias. La figura 5.16 muestra las comparaciones.

También para este arreglo, las magnitudes de campo coinciden, de modo que la distribución de campo mostrado es la que corresponde al campo crítico, es decir que similarmente al caso anterior, cuando se establezca esta distribución de campo existe una probabilidad del 50% de que se establezca una descarga eléctrica.

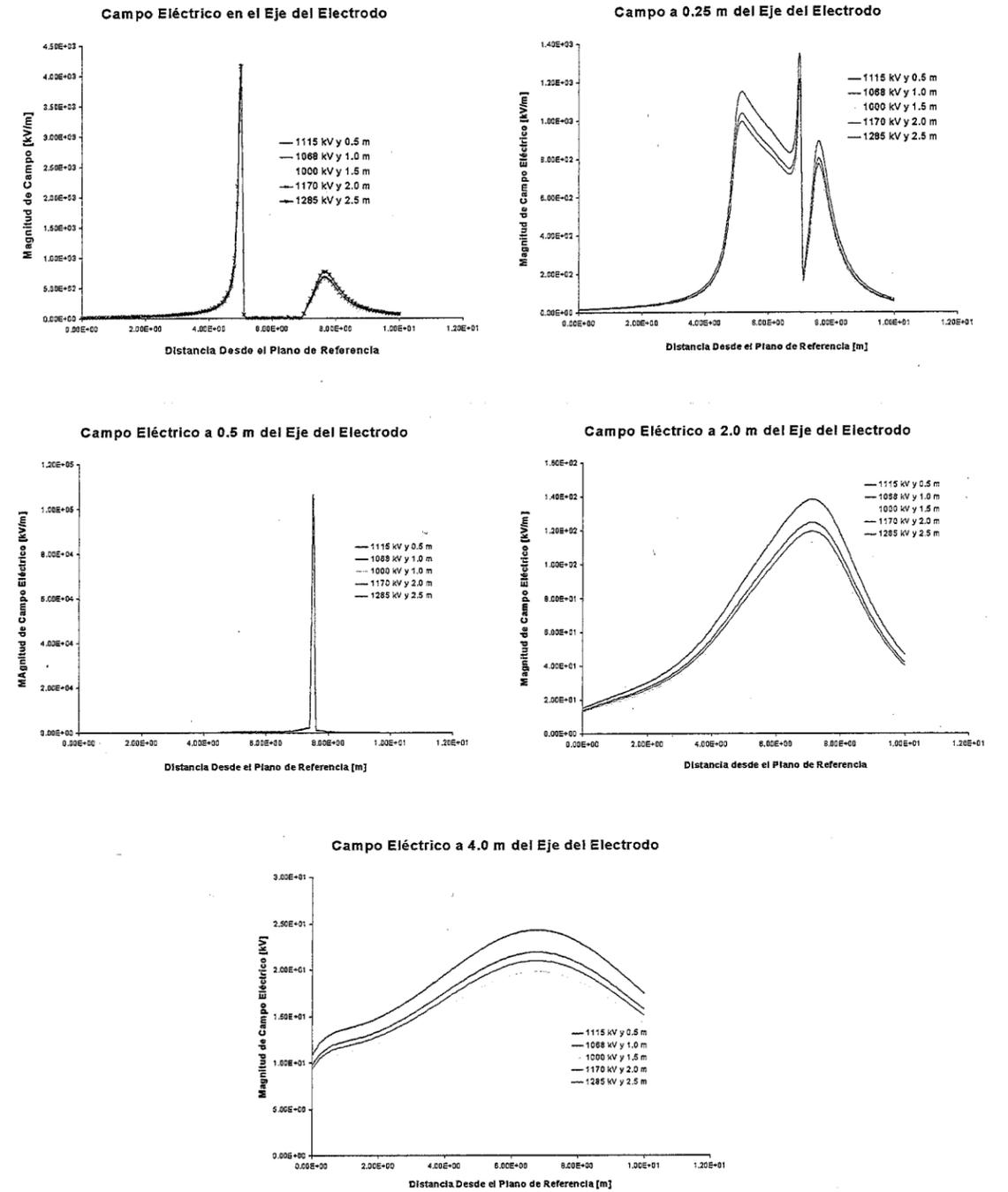


Figura 5.16. Comparación de campo eléctrico en las regiones definidas por la figura 5.15, para la configuración de la figura 4.1 b, con diferentes valores para la tensión de rompimiento y distancia entre electrodos.

5.4 Determinación de la Variación de la Permitividad Relativa con las Condiciones Atmosféricas

Una vez que ya se ha encontrado el campo eléctrico crítico para cada una de las condiciones experimentales en [4], el siguiente paso de acuerdo a la estrategia es encontrar el valor de la permitividad relativa del aire, que iguala la distribución de campo eléctrico crítico que se presenta en condiciones atmosféricas normalizadas con el que se presenta en condiciones no normalizadas. De acuerdo a los resultados experimentales en [4], para cada punto marcado en las figuras 4.2 y 4.3 se presentó una descarga, y de acuerdo a los cálculos de campo eléctrico crítico, esta descarga se debe justamente a la distribución de campo eléctrico crítico, que es el mismo para todos los puntos correspondientes a un electrodo en las mismas condiciones atmosféricas. Entonces, solo se tiene una distribución de campo eléctrico crítico para cada experimento, y de acuerdo a la ecuación 2.18 y a la hipótesis planteada en el capítulo 4, esta distribución de campo eléctrico se presenta tanto en condiciones normalizadas como en condiciones no normalizadas, justamente debido a una variación de la permitividad relativa con las condiciones atmosféricas.

La búsqueda del valor de permitividad relativa que nos lleva a la distribución de campo eléctrico crítico en condiciones atmosféricas normalizadas, con los valores de los electrodos (tensión de rompimiento y distancia) en condiciones atmosféricas no normalizadas, se realizó tanto de manera experimental, como semi – analítica.

5.4.1 Determinación Experimental de la Permitividad Relativa del Aire a 1710 msnm

La búsqueda experimental del valor de la densidad relativa consiste básicamente en el cálculo del campo eléctrico crítico, tomando un valor conocido de tensión de rompimiento y de distancia del gap para un caso correspondiente a descarga en condiciones atmosféricas no críticas, e ir variando el valor de la permitividad relativa, hasta encontrar un valor con el cual la distribución de campo eléctrico crítico se asemeja más a la distribución en condiciones atmosféricas normalizadas.

En ambos electrodos, la búsqueda experimental de la permitividad relativa lleva a un valor similar, en los casos en condiciones atmosféricas no normalizadas, el valor encontrado fue de 1.0004 para los experimentos realizados a 1710 msnm. Las comparaciones se muestran en la figura 5.18. Se reporta la comparación de valores de magnitud de campo eléctrico en el eje del electrodo, aunque cabe destacar que en el resto de la geometría el comportamiento es similar. Aunque las curvas de

las figuras 5.17 son muy parecidas, esto se debe a la escala de valores, pues las diferencias más importantes entre las curvas se dan en las zonas donde el campo es irregular, en la figura 5.18 se muestran las diferencias de magnitud de campo eléctrico crítico de descarga, a lo largo del eje de electrodo, en las condiciones no normalizadas correspondientes a cada valor de permitividad relativa probado, respecto al campo crítico que se establece en condiciones normalizadas, para el electrodo flotado en forma de esfera y en forma de barra, respectivamente.

5.4.2 Determinación Analítica de la Permitividad del Aire a 1710 msnm

En el capítulo 2 de este trabajo, se describe la teoría microscópica de los dieléctricos, y de ahí es conveniente repetir algunas expresiones base para la permitividad relativa, por ejemplo la ecuación 2.15 establece:

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad (5.1)$$

con χ_e la susceptibilidad dieléctrica, a su vez la ecuación 2.29:

$$\chi_e = \frac{\frac{N\alpha}{\varepsilon_0}}{1 - \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}} \quad (5.2)$$

sin embargo, para los gases se puede hacer la aproximación que indica la ecuación 2.30:

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0} \quad (5.3)$$

donde N es la densidad de moléculas por metro cúbico y α es la polarización.

Así pues, la permitividad relativa del aire queda determinada: por el número de moléculas por metro cúbico, el cual es posible determinar a través de los parámetros atmosféricos y moleculares del aire; la permitividad del vacío, que es una constante conocida; y de la polarización.

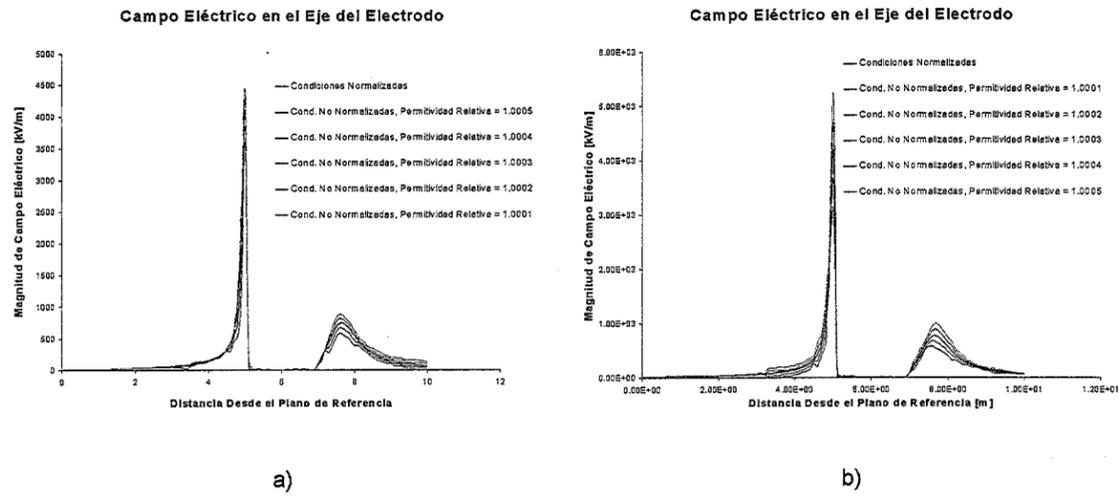


Figura 5.17. Comparación de campo eléctrico calculado con diferentes valores de permitividad relativa, y el campo crítico en condiciones atmosféricas normalizadas, para la configuración de la figura 4.1. a) Electrodo flotado en forma de esfera. b) Electrodo flotado en forma de barra.

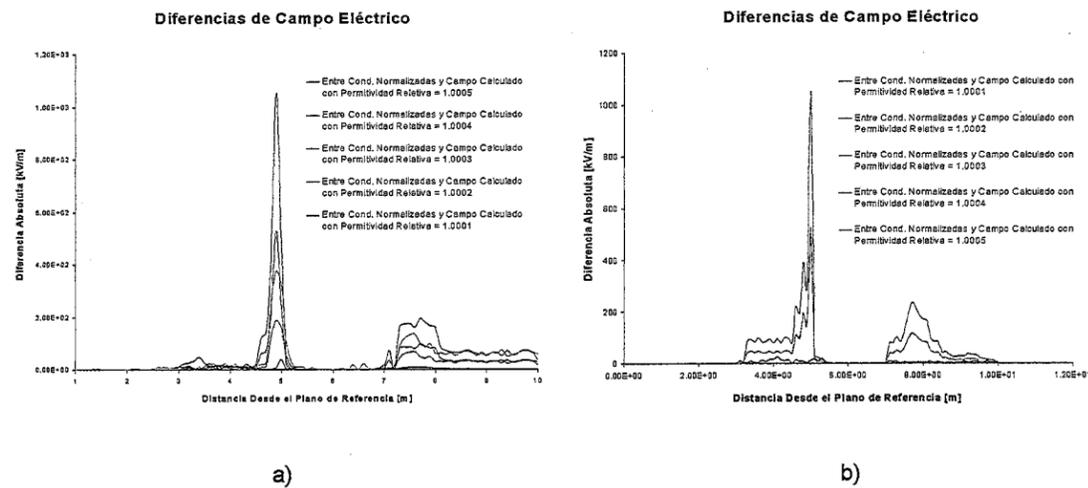


Figura 5.18. Diferencias de cada una de las curvas de la figura 5.17 respecto a la curva correspondiente al campo crítico en condiciones normalizadas. a) Electrodo flotado en forma de esfera. b) electrodo flotado en forma de barra.

5.4.2.1 Polarización del Aire en Diferentes Condiciones Atmosféricas

De las cantidades involucradas en la ecuación 5.3, la polarización es la que representa mayor complejidad de cálculo.

Como se mencionó en el capítulo 2, la polarización tiene tres componentes: la polarización electrónica, la iónica y la orientacional. Dependiendo del tipo de gas dieléctrico, se presentan diferentes combinaciones de los tipos de polarización para formar la polarización total.

El aire es una mezcla con dos componentes predominantes: nitrógeno y oxígeno, ambos en su forma molecular. Ambos gases contienen enlaces covalentes entre el par de átomos que forman la molécula y debido a que el "centro de gravedad" de los electrones que participan en el enlace no es el mismo que el de las cargas restantes en los átomos, se dice que este tipo de moléculas poseen momentos dipolares permanentes y a este tipo de gases se conoce como gases polares.

Para los gases polares, como los casos del nitrógeno y oxígeno molecular, la polarización es la suma de los tres diferentes tipos de polarización, de acuerdo a la ecuación 2.34:

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_o = \alpha_e + \alpha_i + \frac{\mu^2}{3kT} \tag{5.4}$$

quedando la susceptibilidad dieléctrica como indica la ecuación 2.35:

$$\chi_e = \frac{N}{\epsilon_0} \left(\alpha_e + \alpha_i + \frac{\mu^2}{3kT} \right) \tag{5.5}$$

De acuerdo a la teoría microscópica de los dieléctricos expuesta en el capítulo 2, la polarización iónica y la polarización electrónica se presentan a escala atómica, y dependen del valor de campo interno ó campo local, el cual también fue definido en el capítulo 2 como: "El valor de campo eléctrico promedio actuando en el interior de una molécula". Ahora bien, en el capítulo 2 se mencionó también que de acuerdo a la ecuación 2.31, para la mayoría de los gases el campo interno es prácticamente igual al campo macroscópico o exterior, ya que las moléculas de los gases están lo suficiente aparte unas de otras como para que las moléculas vecinas perturben el campo actuando sobre una molécula particular. De modo que tanto la polarización iónica, como la polarización electrónica dependen de la distribución de campo sobre el dieléctrico.

Por otro lado, la polarización orientacional es función de los momentos dipolares que el campo externo provoca en las moléculas, y de la temperatura, de manera que la polarización queda:

$$\alpha = \alpha(\mathbf{E}, T) \tag{5.6}$$

De modo que si se conoce el valor de la permitividad relativa para ciertas condiciones atmosféricas, es posible calcular la permitividad relativa en otras condiciones, siempre que se mantenga constante la temperatura. Por ejemplo, si tomamos el valor de la permitividad relativa para el aire en condiciones atmosféricas normalizadas como 1.0006, la susceptibilidad dieléctrica tiene el valor de 0.0006, esto es:

$$\chi_{e \text{ Cond. Normalizadas}} = \frac{N_{\text{Cond. Normalizadas}} \alpha_{\text{Cond. Normalizadas}}}{\epsilon_0} = 0.0006 \tag{5.7}$$

Si las dos condiciones atmosféricas que se están comparando tienen la misma temperatura, como es el caso de los experimentos reportados en [4], entonces la susceptibilidad dieléctrica solo depende del número de moléculas, ya que el resto de las cantidades en la ecuación 5.5 son constantes al tratarse de las mismas moléculas, bajo la acción del mismo campo eléctrico (el campo eléctrico crítico) a la misma temperatura. Entonces se puede escribir:

$$\chi_{e \text{ Cond. Normalizadas}} \approx \frac{N_{\text{Cond. Normalizadas}} \alpha}{\epsilon_0} \tag{5.8}$$

Y

$$\chi_{e \text{ Cond. No Normalizadas}} \approx \frac{N_{\text{Cond. No Normalizadas}} \alpha}{\epsilon_0} \tag{5.9}$$

al tomar el cociente de la ecuaciones 5.8 y 5.9, queda:

$$\frac{\chi_{e \text{ Cond. Normalizadas}}}{\chi_{e \text{ Cond. No Normalizadas}}} \approx \frac{N_{\text{Cond. Normalizadas}}}{N_{\text{Cond. No Normalizadas}}} \tag{5.10}$$

de donde:

$$\chi_{e \text{ Cond. No Normalizadas}} = \chi_{e \text{ Cond. Normalizadas}} \left(\frac{N_{\text{Cond. No Normalizadas}}}{N_{\text{Cond. Normalizadas}}} \right) \tag{5.11}$$

siempre que en ambos casos se tenga la misma temperatura.

5.4.2.2 Cálculo de la Permitividad Relativa a 1710 msnm

De acuerdo a lo anterior, la determinación de la permitividad relativa en condiciones atmosféricas no normalizadas queda en función de la relación entre el número de moléculas presentes en condiciones atmosféricas no normalizadas, a las presentes en condiciones atmosféricas normalizadas.

Para determinar el número de moléculas presentes por metro cúbico es necesario calcular la densidad del aire y entonces convertir las unidades de gramos a moléculas a través del peso molecular de las moléculas de nitrógeno y oxígeno.

La densidad del aire esta dada por:

$$\delta = \frac{P}{TR} \tag{5.12}$$

con P para la presión barométrica, T para la temperatura en kelvins y R la constante del gas (con valor de 287). El vapor de agua presente en el aire (es decir la humedad) se puede tomar en cuenta si se corrige la temperatura y se utiliza en su lugar lo que se denomina la temperatura virtual.

De acuerdo a los valores para los parámetros atmosféricos en las condiciones experimentales a 1710 msnm en [4] (20°C, aire seco y 830 mb) la relación de número de moléculas encontrada es de 0.78, de modo que la susceptibilidad dieléctrica a 1710 msnm en esas condiciones atmosféricas es:

$$\chi_{e \text{ 20°C, Aire seco, 830mb}} = \frac{N_{\text{20°C, Aire Seco, 830mb}}}{N_{\text{Cond. Normalizadas}}} \chi_{e \text{ Cond. Normalizadas}} = 0.78(0.0006) = 0.000468$$

Como se puede constatar el valor aproximado de la permitividad relativa con la susceptibilidad calculada sería de 1.000468, que concuerda el valor de 1.0004 de los resultados de los cálculos numéricos de campo realizados.

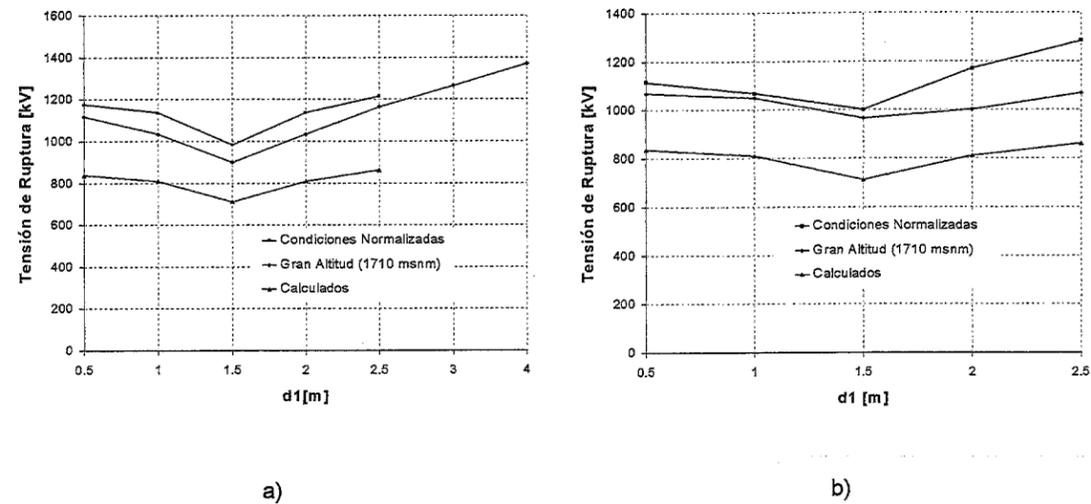


Figura 5.19. Tensiones de rompimiento en condiciones experimentales a nivel de mar, a 1710 msnm y tensión de rompimiento a 1710 msnm calculada según la Guía de Coordinación de Aislamiento de CIGRE, para la configuración de la figura 4.1. a) Electrodo flotado en forma de esfera. b) Electrodo flotado en forma de barra.

5.5 Comparación entre el Campo Eléctrico Crítico Establecido con la Permitividad Relativa Corregida y el Establecido con la Tensión de Rompimiento Corregida, en Ambiente de Gran Altitud

De acuerdo a lo expuesto en el capítulo 4, el procedimiento actual de corrección es: primero corregir el valor de la tensión de rompimiento para tomar en cuenta las condiciones atmosféricas y luego corregir nuevamente para tomar en cuenta la presencia de electrodos flotados. Resulta interesante comparar el campo eléctrico que se establece con los valores corregidos de la tensión de rompimiento, con el campo crítico que se ha calculado.

La figura 5.19 a muestra los valores de tensión de rompimiento que se presentaron en condiciones atmosféricas normalizadas, en condiciones no normalizadas y los valores corregidos de acuerdo a la recomendación [3] de las ecuaciones 4.5 y 4.8, en el caso del electrodo de la figura

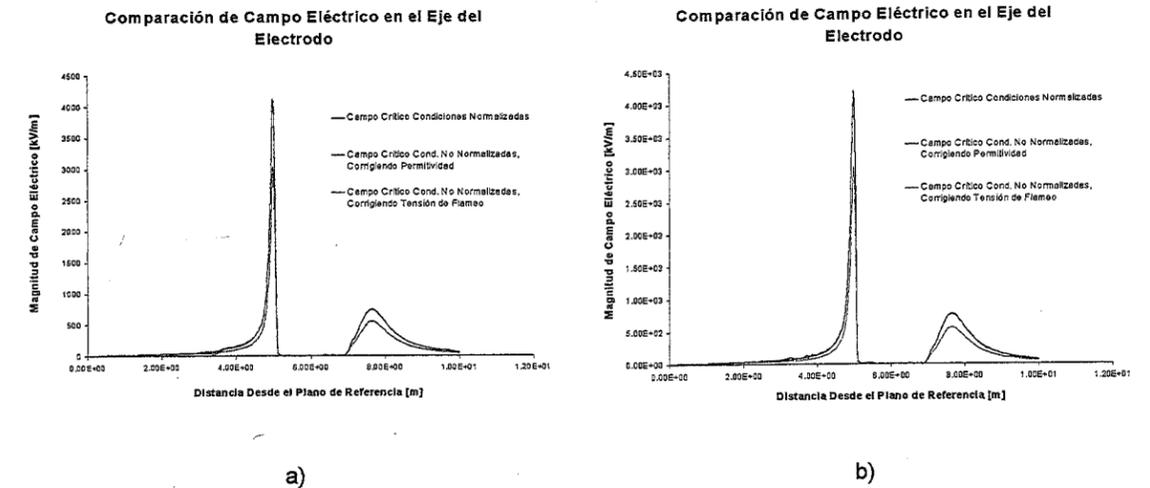


Figura 5.20. Comparación de campo eléctrico crítico: experimental a nivel de mar, a 1710 msnm calculado corrigiendo la permitividad relativa y calculado corrigiendo la tensión de rompimiento según la Guía de Coordinación de Aislamiento de CIGRE, para la configuración de la figura 4.1. a) Electrodo flotado en forma de esfera. b) Electrodo flotado en forma de barra.

4.1 a, es decir el electrodo punta – plano con un electrodo flotado en forma de esfera con una protuberancia. Para el otro electrodo utilizado, es decir el electrodo punta – plano con electrodo flotado en forma de barra, de la figura 4.1 b, los valores los muestra la figura 5.19 b.

Realizando el cálculo de campo eléctrico para los valores de tensión de rompimiento corregido según la [3], para cada uno de los puntos de las gráficas de la figura 5.19, para cada geometría, se observa que la forma de la distribución de campo eléctrico es similar a la forma de la distribución de campo eléctrico crítico de descarga que se ha calculado, no así los valores, que están muy por debajo de los valores que se presentan en el campo crítico. La figura 5.20 ilustra este hecho para cada electrodo usado.

Capítulo 6. Conclusiones

6.1 Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en este trabajo, es posible obtener ciertas conclusiones, las cuales se mencionan a continuación:

6.1.1 Acerca del Entorno del Problema

La realización de un trabajo de investigación con una aplicación a un problema real, además de los beneficios académicos inherentes a un trabajo de este tipo, tiene un impacto importante en el entorno original del problema. En este caso este beneficio resulta por demás interesante ya que se da en una industria que es considerada como estratégica en el desarrollo del país, como lo es la industria eléctrica. De este trabajo se desprenden las siguientes conclusiones en este aspecto:

- Los países en vías de desarrollo, cuentan con sistemas de potencia de rápido crecimiento, cuya velocidad de expansión de la demanda es proporcional a la velocidad en que esos países se industrializan.

- Actualmente existe una crisis energética en el país, la cual afecta de manera importante al sistema de potencia, ya que se plantean nuevos requerimientos ante el crecimiento de la demanda de energía. Dentro de estos requerimientos se encuentra el aumento en la capacidad de transmisión de energía eléctrica, como una de las cuestiones más importantes ya actualmente el sistema de transmisión es la parte del sistema de potencia que ha crecido menos respecto al crecimiento en la demanda de energía eléctrica.
- Una forma en que se está aumentando la capacidad de transmisión de energía eléctrica del sistema de potencia es el rediseño eléctrico de las líneas de transmisión existentes, para aumentar el número de circuitos reutilizando las torres de transmisión.
- Las líneas de transmisión que cuentan con varios circuitos, a menudo son indispensables para asegurar la continuidad del servicio, de modo que se requiere que el trabajo de mantenimiento a estas líneas sea realizado sin la desconexión de estas, a lo que se conoce como "trabajo en línea viva".
- El estudio de los fenómenos que se relacionan con el trabajo en línea viva en líneas aéreas de transporte de energía eléctrica, es de suma importancia en los sistemas de potencia de rápido crecimiento, como el sistema de potencia de México.

6.1.2 Acerca de la Modelación Física del Trabajo en Línea Viva

Debido a la gran diversidad en las configuraciones de las líneas de transmisión, que pueden ser sometidas en algún momento dado a trabajo en línea viva, es necesario diseñar modelos, con los que se pueda trabajar. De la calidad con que estos modelos reflejen la situación de trabajo en línea viva, depende en gran medida todo el trabajo que se haga en este tema. En particular se puede establecer que:

- La modelación del trabajo en línea viva se puede realizar con arreglos que contienen electrodos flotados, ya que estos reflejan de manera apropiada las situaciones de trabajo en línea viva que se presentan a menudo, como es el caso de objetos conductores extraños que se introducen en el área de la línea de transmisión, los cuales pueden ser, un trabajador en un traje conductor, un helicóptero ó una herramienta conductora.
- En el diseño de dichos arreglos se deben considerar aquellas geometrías que presenten características tales que provoquen las condiciones más críticas de trabajo que se puedan encontrar, estas consideraciones de diseño de modelos fueron estudiadas en [5] y son:

Electrodos punta – plano con electrodos flotados de gran tamaño, con protuberancias en la superficie anódica, y alineados con el eje del electrodo, bajo la acción de impulsos positivos.

- Los electrodos utilizados en [4] para la experimentación, se consideran adecuados para modelar situaciones críticas de trabajo en línea viva, de acuerdo a los puntos anteriores.

6.1.3 Acerca de los Fundamentos de la Simulación

La simulación de trabajo en línea viva, consiste básicamente en la utilización de las configuraciones ó modelos diseñados, y la aplicación de tensiones de impulso para determinar la magnitud a la que se produce una descarga en el modelo usado. Para determinar la influencia de la altitud en estos experimentos fue necesario revisar la teoría que describe el comportamiento de los mismos, de lo cual se puede puntualizar lo siguiente:

- El proceso de la descarga eléctrica involucra factores estadísticos, de manera que es necesario repetir las pruebas de impulso para determinar las tensiones de rompimiento.
- La descarga eléctrica se produce porque el esfuerzo, que el campo eléctrico que se establece con el potencial aplicado, introduce en el medio dieléctrico es mayor que la rigidez dieléctrica en este, en ciertas zonas, en las cuales se producen las primeras avalanchas de descarga.
- Las condiciones de las pruebas de impulso, aún las de impulso de maniobra, se pueden aproximar por modelos electrostáticos.
- El campo eléctrico en electrostática está regido por la ecuación de Poisson y en las condiciones experimentales mencionadas, al no existir cargas al inicio de las pruebas, el término de la densidad de carga de la ecuación de Poisson es cero, a lo que se conoce como ecuación de Laplace.
- El dieléctrico en electrostática queda parametrizado a través de la permitividad relativa, la cual queda determinada para los gases por la polarización del medio, la densidad de moléculas, la temperatura y el valor de los momentos dipolares permanentes en la molécula, los cuales son inherentes al material.

6.1.4 Acerca de los Métodos Numéricos de Solución al Modelo del Campo Eléctrico

Los métodos numéricos para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales, están siendo cada vez más usados para la simulación de situaciones de la vida real, ya que este tipo de ecuaciones gobiernan una gran variedad de fenómenos físicos, como por ejemplo el campo eléctrico. Sin embargo, la aplicación de estos métodos requieren de alta capacidad de cómputo, motivo por el cual su aplicación estaba reservada a aquellos con los recursos suficientes para mantener grandes instalaciones de cómputo. Sin embargo, actualmente las computadoras de escritorio de tamaño mediano, ya son capaces de realizar estos cálculos con la suficiente rapidez, por lo que la aplicación de estos métodos se ha popularizado.

En el caso concreto del Método del Elemento Finito y del Método del Elemento en la Frontera, por su naturaleza se requiere de construir mallas automáticas hasta en tres dimensiones. Debido a que el propósito de este trabajo es utilizar a estos métodos como herramienta de simulación, se optó por la utilización de herramientas comerciales. Con lo cual fue posible realizar una gran cantidad de simulaciones que permitieron obtener los resultados trascendentes al trabajo y comparar estos dos métodos.

Acerca de los métodos numéricos utilizados se puede concluir que:

- Para resolver la ecuación de Laplace en geometrías complejas se requiere la utilización de métodos numéricos.
- Dos de los métodos numéricos que a menudo se utilizan en problemas de ingeniería para la solución de problemas con ecuaciones diferenciales parciales, son el Método del Elemento Finito y el Método del Elemento en la Frontera. Ambos métodos son aplicables al presente problema.
- Para este problema en particular, con el Método del Elemento en la Frontera se obtienen resultados de manera más rápida en comparación con el Método del Elemento Finito, sin embargo los resultados obtenidos son prácticamente iguales, por lo que puede utilizarse cualquiera de los métodos.

- El Método del Elemento Finito y el Método del Elemento en la Frontera se basan en la misma idea: la discretización del dominio donde actúa la ecuación diferencial parcial que gobierna el fenómeno que se está analizando. Sin embargo, existen algunas diferencias claves entre estos métodos, que conviene conocer para así poder aprovecharlos en los casos donde se desempeñan mejor.
- La primera diferencia que resulta al utilizar el Método del Elemento Finito y el Método del Elemento en la Frontera es la discretización, es decir el mallado, mientras que un programa de computadora de elemento finito tarda una parte considerable del tiempo total de análisis en la discretización, un programa de elemento en la frontera realiza este paso de manera instantánea y prácticamente sin intervención del usuario, en contraste con el programa de elemento finito, donde se deben especificar varios parámetros para lograr un buen mallado. Este hecho se debe a que para el análisis por elemento finito se requiere una malla de la misma dimensión que el problema que se está resolviendo, es decir, para un problema en el espacio se requiere una malla en tercera dimensión, mientras que para el análisis por elemento en la frontera se requiere una malla de una dimensión menos que la dimensión del problema. Esto constituye la principal fortaleza del Método del Elemento en la Frontera respecto al Método del Elemento Finito.
- Otra cuestión importante que resulta de revisar la teoría de ambos métodos, es que mientras que en el Método del Elemento Finito se aproxima la solución de la ecuación diferencial parcial en todo el dominio, en el Método del Elemento en la Frontera solo se aproxima la solución en la frontera, y luego si se requiere se calcula la solución en todo el dominio en un paso aparte. Esta característica de ambos métodos puede ser una ventaja o desventaja dependiendo de la aplicación, pues puede haber problemas donde el interés está en lo que sucede en las fronteras y no se requiera la solución en todo el dominio.
- Desde el punto de vista de la implementación computacional de estos métodos, gran parte de la dificultad radica en la generación de las mallas, sin embargo, una vez que se ha resuelto el problema de las mallas, el Método del Elemento Finito es relativamente fácil de implementar, mientras que las integrales involucradas en el Método del Elemento en la Frontera son difíciles de evaluar, ya que a menudo contienen singularidades, por lo que la implementación de este método en general es más complicada. Por otro lado, las matrices que se generan del Método del Elemento en la Frontera son matrices llenas, en contraste con las matrices ralas del Método del Elemento Finito, claro que este hecho resulta menos importante en la implementación, ya que las dimensiones de las matrices en ambos casos dependen de la malla.

- Mientras que el Método del Elemento Finito es ampliamente aplicable a cualquier problema, el Método del Elemento en la Frontera no, ya que es necesario encontrar una solución fundamental a la ecuación diferencial antes de aplicarlo. Esta cuestión provoca que el Método del Elemento en la Frontera no se pueda aplicar a problemas no lineales e inclusive no se pueda aplicar a muchos problemas lineales (medio no homogéneo).
- El problema de campo eléctrico en general es de dominio abierto, es decir el dominio de la ecuación de campo no está confinado a una región específica, de manera que para utilizar ya sea el Método del Elemento Finito ó el Método del Elemento en la Frontera, es necesario definir una región de interés.
- Sí se utiliza el Método del Elemento Finito en problemas de dominio abierto, es necesario utilizar elementos especiales en la última capa de la discretización, con el fin de evitar soluciones erróneas, como se menciona en el capítulo tres.

6.1.5 Acerca de las Correcciones Realizadas Anteriormente

En [3] se integra todo el trabajo de investigación referente a la corrección por factores atmosféricos, sin embargo las correcciones ahí presentadas se aplican a las tensiones de ruptura y fueron obtenidas mediante modelos de regresión aplicados a valores experimentales. Sin embargo, como se muestra en [4] las correcciones no funcionan del todo bien en todas las ocasiones. De la revisión de los trabajos integrados en [3], se puede concluir que:

- Los factores atmosféricos afectan la rigidez dieléctrica, de acuerdo a la ecuación 4.1, modificando así la tensión de rompimiento.
- La altitud de un lugar tiene la mayor influencia en el comportamiento del aire como dieléctrico, al modificarse la densidad de este.
- Las correcciones realizadas a la tensión de rompimiento funcionan en ciertos rangos de altitud, por ejemplo el modelo presentado en [1] funciona hasta una altitud de 1000 msnm y el presentado en [2] hasta 3000 msnm, sin embargo ambos métodos fueron obtenidos de manera experimental.

- Es necesario corregir también el valor de la tensión de rompimiento, por la presencia de electrodos flotados.
- Para los casos donde se tienen electrodos flotados en lugares de gran altitud, los modelos de corrección a la tensión de rompimiento no funcionan bien.

6.1.6 Acerca de los Resultados Obtenidos para la Corrección de Campo Eléctrico

De acuerdo a los resultados publicados en [4], se observa que es necesario encontrar correcciones que se apliquen al origen de la tensión de rompimiento, es decir al campo eléctrico, pues aunque pueden seguir buscando modelos de corrección a la tensión de ruptura, siempre van a depender de las condiciones experimentales con las que obtengan los datos y de las técnicas de regresión. Por esta razón en este trabajo se propone una corrección a la permitividad relativa, factor que afecta al campo eléctrico.

Debido a que la corrección encontrada en este trabajo se aplica al campo eléctrico, puede ser utilizada en cualquier situación, siempre que se tengan los datos necesarios. Lo que determina en gran medida las limitaciones que tiene esta corrección.

- Existe una distribución de campo eléctrico, que cuando se establece en el electrodo se tiene una probabilidad de 50% de que se produzca una descarga, este campo eléctrico se denomina Campo Eléctrico Crítico y es único en todo el dominio, aún cuando los parámetros del electrodo cambien.
- La permitividad del aire se puede calcular en cualquier lugar, siempre que se conozcan mediciones de temperatura, humedad y presión atmosférica, y siempre y cuando la temperatura coincida con la temperatura normalizada de 20°C, la permitividad queda en función únicamente de la relación entre la combinación de moléculas de los componentes de aire en las condiciones existentes en el lugar de interés y la combinación de moléculas en condiciones normalizadas. En caso de no coincidir la temperatura con la temperatura normalizada, se requieren mediciones de susceptibilidad dieléctrica contra temperatura para el aire, con el objeto de calcular la permitividad relativa.
- El cálculo de campo eléctrico corregido mediante el cálculo de la permitividad relativa se comporta bien, pues asemeja la distribución de campo crítico que se había calculado en condiciones normalizadas.
- El cálculo de campo eléctrico, corrigiendo las tensiones de rompimiento de acuerdo a [3], obtiene una distribución similar a la del campo crítico pero con valores muy por debajo de las

magnitudes del campo crítico, por lo que no refleja la situación de rompimiento que se presenta en la realidad.

6.2 Aplicaciones

Las aplicaciones potenciales de este trabajo son por necesidad en trabajos futuros de investigación y desarrollo, ya que como ya se mencionó hasta el momento no existe un método para corregir las tensiones de rompimiento dado el campo eléctrico, es necesario realizar estudios en el tema para obtener dicho método, que tendría un gran número de aplicaciones prácticas.

Por otro lado, se puede aplicar una metodología similar a la presentada en este trabajo para cálculos de campo magnético y luego complementar los resultados con simulaciones de campos variantes en el tiempo, con el fin de aplicar los resultados a la investigación de la física de la descarga.

Una aplicación importante del cálculo exacto de campo eléctrico, es en el diseño de la coordinación de aislamiento de equipo eléctrico, ya que a partir de la distribución de campo eléctrico se pueden identificar zonas de alto esfuerzo eléctrico.

Es importante hacer notar que la aplicación del método de corrección para la permitividad relativa, tal como se aplicó en este trabajo, se puede aplicar cuando se quiera conocer la permitividad relativa en ciertas condiciones y se conozca este valor en otras condiciones, en ambos ambientes se debe tener el mismo dieléctrico gaseoso a la misma temperatura. En caso de que la temperatura no sea la misma, aún puede aplicarse la corrección, sin embargo es necesario contar con mediciones de susceptibilidad dieléctrica contra temperatura.

Sin embargo, el propósito de este trabajo rebasa el problema en sí, ya que al ser la aplicación de los métodos numéricos en problemas de ingeniería eléctrica, una parte importante en la motivación de este trabajo, se pretende que este reporte sirva como base para la aplicación de estos métodos en otro tipo innumerable de problemas en la ingeniería eléctrica, ya que se han aprovechado poco en la solución de este tipo de problemas.

6.3 Trabajo Futuro

A partir de los resultados y procedimientos desarrollados en este trabajo, se propone una serie de trabajos con el objeto de complementar la investigación sobre trabajo en línea viva:

- Hacer experimentación en otras condiciones atmosféricas (a otra altitud), para comparar el modelo corregido, se sugiere el uso de un tanque con condiciones controladas para las descargas.
- Realizar mediciones de susceptibilidad dieléctrica contra temperatura para el aire, con el fin de separar la contribución de la polarización orientacional a la polarización total, y así poder calcular la permitividad relativa a cualquier temperatura.
- Realizar los cálculos y correcciones para el modelo de campo magnético, para tratar de corregir la conductividad del dieléctrico.
- Simular la prueba de impulso utilizando la ecuación del impulso doble exponencial como el potencial, es decir introducir el factor tiempo al modelo.
- Considerar el cálculo de geometrías complejas como una ventana de una torre de transmisión, con un maniquí y herramienta de trabajo en línea viva, tanto para realizar la experimentación como la simulación de las condiciones.
- Investigar la trayectoria de descarga en las pruebas de impulso.
- Encontrar un modelo para realizar las correcciones a la tensión de ruptura, a partir de la distribución de campo eléctrico.

- no estudo
- FEM vs BEM
 - tamanho do sistema
 - como interpretar resultados do estudo
- Método do cálculo de E_r
- X_c com o método de Regula
- FEM - Elétricas

Referencias

- [1] A. Pignini, G. Sartorio, M. Moreno, M. Ramirez, R. Cortina, E. Garbagnati, A. C. Britten. "Influence of air density on the impulse strength of external insulation". IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 104-1985.
- [2] M. Ramirez, M. Moreno, A. Pignini, G. Rizzi, E. Garbagnati. "Air density influence on the strength of external insulation under positive impulse: experimental investigation up to an altitude of 3000 m. a. s. l.". IEEE paper 89 SM 622-2 PWRD.
- [3] CIGRE WG 33.07 "Guidelines for insulation coordination in live working". Feb. 2000.
- [4] A. Villalobos, L. Alba. "Altitude effect on the dielectric performance of live line working configurations"- ISH 1997.
- [5] B. Hutzler. "Switching impulse strength of air gaps containing a metallic body at floating potential". 5^a ISH, Braunschweig, 1987.
- [6] F. A. M. Risk. "Effect of conducting objects on critical switching impulse breakdown of long air gaps". CIGRE Session Aug.-Sep. 1994.
- [7] N. H. Malik, A. A. Al-Arainy, M. I. Qureshi. "Electrical insulation in power systems", Marcel Dekker Inc. New York, NY, 1998.
- [8] R. S. Elliot. "Electromagnetics, history, theory and applications". IEEE Press, New York, NY, 1992.

